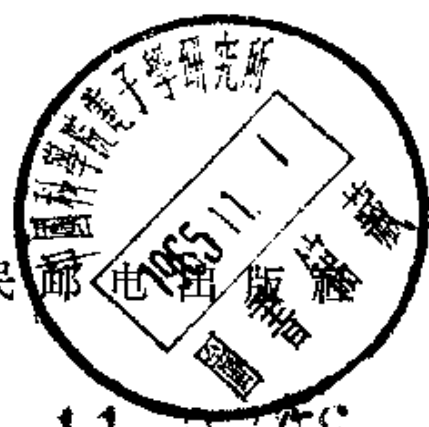


73.45
155

无綫电信号頻譜

苏联 M. C. 古列維奇 著

靳 蕓 譯



人民郵電出版社

11.6.56

М. С. ГУРЕВИЧ
СПЕКТРЫ РАДИОСИГНАЛОВ
СВЯЗЬ ИЗДАТ МОСКВА 1963

内 容 提 要

本书研究各种无线电信号的频谱，以及在最通用的调制形式下防止无线电通信波道内发生相互干扰的措施。书中也叙述了在发送室和控制室里测量无线电通信波道所占用频带宽度的一些方法。

本书可供广大的无线电工程师、科学工作者以及高等学校无线电工程专业专业的研究生和高年级学生学习通信理论之用，也可供实用电路计算与测量中参考。

无 线 电 信 号 频 谱

著者：苏联 М. С. 古列维奇
译者：靳 蕃
出版者：人民邮电出版社

北京东四 6 条 10 号

(北京市书刊出版业营业许可证出字第〇四八号)

印刷者：北京市印刷一厂
发行者：新华书店北京发行所
经售者：各地新华书店

开本 850×1168 1/32 1965 年10月北京第一版
印张 9 20/32 页数 154 插页 1 1965 年10月北京第一次印刷
印刷字数 255,000 字 印数 1—2,750 册

统一书号：15045·总1441—无410

定价：(科 7.) 1.70 元

序

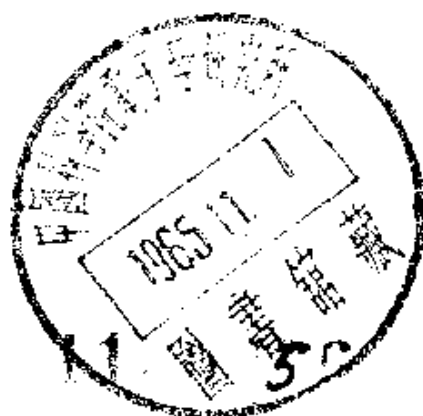
无綫电通信在一个总的电信网中起着十分重要的作用。无綫电通信的进一步发展，主要决定于下列問題解决的順利程度如何：

- 1) 增大无綫电通信系統的通过能力与提高它的抗干扰性；
- 2) 更經濟地利用分配給无綫电波道的頻带，以便能在有限的頻率范围内，設置最大数量的、具有最小互相干扰的波道。

为了順利地解决这些問題，需要研究无綫电信号的頻譜，特別是要探討减小无綫电波道頻带宽度的可能性（頻带宽度是表征无綫电通信系統和无綫电頻譜利用率的最重要指标）。

尽管人們很早就对无綫电信号頻譜的研究有很大的兴趣，但是对这个領域里許多問題的研究仍然很不够。本书是以作者若干年来所作的研究为基础而写成的。

作者



目 录

序

緒論

1. 无綫电頻譜及其利用	1
2. 作为信号物理特性的頻帶寬度	5
3. 有关无綫电信号頻譜的一些基本概念和定义	6
4. 本书討論的問題	10
第一章 信号的数学表示形式与頻譜概念	11
§ 1.1. 信号表示的一般概念	11
§ 1.2. 指数函数的利用	12
§ 1.3. 正交性与完备性	15
§ 1.4. 延迟函数的方法	19
第二章 在給定頻帶中包含有最大部分能量的有限持續信号	21
§ 2.1. 信号与頻譜間的某些关系	21
§ 2.2. 积分方程的建立	23
§ 2.3. 确定信号部分能量的界限	25
§ 2.4. 利用核的展开来求积分方程的近似解	27
§ 2.5. 把积分方程化为微分方程的边值問題来求解	31
§ 2.6. 参数 k 值較大时对信号 $u(k, \lambda)$ 的研究	40
第三章 传输脉冲占用的頻帶	41
§ 3.1. 頻帶中脉冲能量的分布	42
§ 3.2. 矩形脉冲	43
§ 3.3. 梯形脉冲与三角形脉冲	44
§ 3.4. 形状为余弦曲綫一段的脉冲。余弦形脉冲	46
§ 3.5. 具有余弦-平方律圆化的脉冲	54
§ 3.6. 余弦-立方形脉冲	59
第四章 传输占用的頻帶寬度和信号的建立時間	61
§ 4.1. 一般概念	61
§ 4.2. 信号建立時間的定义	62
§ 4.3. 评价信号的一般判据	62

§ 4.4. k_y 的数值	63
第五章 以减低带外辐射为目的的信号的形	67
§ 5.1. 前言	67
§ 5.2. 从仙农理论关于波道通过能力的观点来研究减低带外 辐射能量的可能性	68
§ 5.3. 以函数及其导数的跃变表示的傅里叶积分变换	70
§ 5.4. 脉冲形状与带外辐射衰减速度之间的关系	73
§ 5.5. 频谱减低不慢于 C/ω^{n+1} 的有限持续信号的形状	75
第六章 振幅键控与频率键控时, 传输无线电信号占用的频带	87
§ 6.1. 振幅键控时传输占用的频带宽度	87
§ 6.2. 频率键控时传输占用的频带宽度	93
§ 6.3. 两种键控形式下占用频带的比较	98
第七章 频率键控时各种不同形状无线电信号的频谱	99
§ 7.1. 梯形脉冲	100
§ 7.2. 正弦律圆化的脉冲	104
§ 7.3. 频带宽度的计算结果	107
§ 7.4. 不同信号形状的带外辐射	108
第八章 传输占用频带宽度与信号延迟时间之间的关系	115
§ 8.1. 波道的通过能力与延迟时间	115
§ 8.2. 保证传输有限延时信号的通信系统特性	118
§ 8.3. 考虑延时时的波道通过能力	121
§ 8.4. 占用最小频带、频谱有限的信号形状	122
第九章 正规信号序列与随机信号序列频谱间的关系	131
§ 9.1. 初步概念	131
§ 9.2. 用在时间上推移的基本信号来表示消息	132
§ 9.3. 频谱 $R(\omega)$	134
§ 9.4. 相应于重复因子的信号	138
§ 9.5. 各种频谱的能量关系	140
§ 9.6. 结论	145
第十章 传输随机信号序列占用的频带	146
§ 10.1. 确定传输随机信号序列占用频带宽度时所发生的困难	146
§ 10.2. 借相关函数来确定频带宽度	148

第十一章 传输随机信号序列时无线电通信波道間相互干扰的減低	151
§ 11.1. 研究相互干扰問題的可能方法	151
§ 11.2. 表示为延迟函数級数形式的信号的能最頻譜	153
§ 11.3. 不相关信号的頻譜	154
§ 11.4. 相关信号的頻譜	158
§ 11.5. 結論	158
第十二章 利用振幅、頻率或相位調制的无线电通信系統間的相互 干扰	159
§ 12.1. 原始假定	159
§ 12.2. 各种不同失調下相互干扰能量的变化	161
§ 12.3. 通过与接收机等效的滤波器 F_R 发送的信号最大振幅 A 和能量 W 之間的关系	163
§ 12.4. 当 $P_U < P_R$ 时 A 与 W 之間的关系	164
§ 12.5. 当 $P_U > P_R$ 时 A 与 W 之間的关系	171
§ 12.6. 确定波道間的差值	174
第十三章 信号在发射机中的形成	199
§ 13.1. 选择脉冲形状的一些实际建議	199
§ 13.2. 鍵控回路中的綫性滤波器	204
§ 13.3. 形成信号的非綫性装置	209
第十四章 无线电报发报机辐射的頻帶寬度的測量	212
§ 14.1. 測量辐射頻帶寬度的方法	213
§ 14.2. 确定測量无线电报辐射占用頻帶寬度的电平	221
§ 14.3. 遙測无线电发射机辐射的頻帶寬度	224
§ 14.4. 对試驗确定随机信号序列传输占用頻帶寬度的一些实 用建議	229
附录	231
附录 I 各类辐射必需的頻帶寬度	231
附录 II 将积分方程化为微分方程的边值問題	233
附录 III 确定系数 d_n	237
附录 IV 計算积分 $A(k), B(k)$ 与 $C(k)$ 的公式	244
附录 V 洛麦利函数 $S_{\mu, \nu}(Z)$	245
附录 VI 頻率鍵控时梯形脉冲与正弦律圓化脉冲辐射占用的頻 帶寬度	296
附录 VII 辐射的分类	297
参考文献	300

緒 論

本章探討無線電頻率不够用的原因和改善對頻譜利用的方法。

文中指出，在確定無線電通信波道通過能力的諸參數中，頻帶寬度起着重要的作用。

確定了輻射所占用的頻帶寬度、必要的頻帶寬度以及帶外輻射的概念。

論證了輻射所占用頻帶寬度的“能量”定義（即包含有輻射功率主要部分的頻帶的定義）的合理性。

舉出了作者打算列在本書中並加以解決的一些主要問題。

1. 無線電頻譜及其利用

如果考察一下無線電技術的發展，就會看到在 $20 \cdot 10^3$ 赫至 10^{11} 赫間極其廣闊的頻率範圍內，人們在利用電磁振蕩方面所取得的巨大成就。在無線電通信、無線電廣播、電視、雷達、無線電導航、遠程控制、遠程測量中，利用無線電波來傳輸信號，在工業與醫學中，也使用高頻電場與磁場。上所列舉，已經足以表明無線電頻率的利用與國家的國民經濟和文化生活是緊密相關的。

無線電通信、無線電廣播以及與之鄰近的一些部門迅速進步所帶來的不利的一面，是愈來愈增加了頻譜的負擔。有關生活方面的許多重要業務使波道的負擔過重，因而互擾電平日益增加。近年來用戶的迅速增多，使無線電頻率更加不够用了。因此，應當將無線電頻譜視作一筆有限的財富，很慎重地予以利用和細心愛護。

當前使用着的頻譜這麼寬，但還不能滿足無線電業務需要，其原因是很多的。

第一個、也是最重要的一個原因，就在於超過 30 兆赫的頻率不如較低頻率用得那麼廣泛。低於 30 兆赫的頻率，適用於距離數千公里的通信中，以及需要很經濟地為散布得很廣的聽眾服務的無線電廣播中；而高於 30 兆赫的頻率，則用在距離不超過一百公里且發

射机功率不太大的通信中。为了长距离、无中继地传输消息，在宽度为一兆兆赫的总频谱范围内，只能利用 30 兆赫以下的频带。这就是 30 兆赫以下的频谱为什么严重过载的原因。

第二个原因在于，许多新的业务部门，例如采用频率调制的超短波广播、电视与雷达所需的波道，要比旧有的一些业务所使用的波道宽得多。例如，采用频率调制的超短波无线电台所占用的频带，要比采用振幅调制的无线电台所占用的频带宽 20 倍。电视波道比用振幅调制方法进行广播的波道要宽 600 倍。雷达站所占用的频带要比无线电报通信所需的频带宽数千倍。

第三个原因是频谱的上段（高于 10,000 兆赫的频率）很难利用。频率达到这个范围时，发射机的功率与接收机的灵敏度都不大。大气成分的不均匀，会使某些频率的传播发生困难。例如，当频率超过 30,000 兆赫时，暴雨可能使电路遭到破坏。

频谱负担过重的第四个原因，是很难将某些业务从它已经“各得其所”的频率范围内，调动至新的、还很少掌握的频率范围中去。

在最有效地利用频谱的道路上，究竟存在着哪些技术上的困难呢？

首先要指出这样一个因素，即仅当信号对干扰的比值大大地超过 1 时，通信系统才能很好地发挥作用。最近时期，的确出现了相关法，它能使我们在信号对干扰的比值小于 1 的情况下工作，可是这样却大大地增加了占用波道的时间。因此，实际上信号电平应当比干扰电平高 10 至 50 分贝。

无线电台在超出其工作范围很远的距离内造成强烈的干扰，甚至当无线电台在地域上作最合理的分布，且无线电波传播条件不变化的情况下，每一台发射机对距离超过该电台服务区域半径三倍处、工作频率相同的其他发射机的接收机的接收，会造成强烈的干扰。实际上，任何时候也不能够仅根据地域上的考虑来分布发射机于各地。事实上，信号电平与干扰电平根据大气的条件，特别是电离层

的状态（对約低于 50 兆赫的頻率而言）和对流层的状态（对高于 50 兆赫的頻率而言）而变化。这种变化可能是极大的，并且可能具有不定期的或周期性的特征，几乎不可能对它們預先詳細地确定。此外，传播条件的昼夜变化和季节性变化（特别是对于低于 25 兆赫的頻率而言），要求无綫电台备有几种不同頻率，以便根据一天或一年的時間和工作距离来先后选用。

只向有接收机的方向发送信号，只朝有发射台的方向接收信号，亦即采用定向天綫，就可以改善頻譜的利用。定向天綫广泛地用在干綫无綫电通信，而很少用在移动的业务中。它們能够而且应当十分广泛地用在整个无綫电通信和广播領域中。

因此，我們涉及到布置許多利用同一頻率、且具有最小相互干扰的电台的技术問題。同样重要的是使每一个电台只利用最小部分的頻譜。如果我們希望最大限度地占用頻譜，那末，傳輸所占用頻帶的寬度就应当尽可能地窄，且为信号的頻率分量所紧密充滿，而防护頻帶和頻差容限則应当減至最小值。

現在我們首先來討論不同类型发射机所占用的頻帶寬度問題，和頻率分量如何充滿波道的問題。

在所有有效調制方法中，能量是集中于傳輸所占用頻帶的一定区段上；同时，波道中頻率分量分布密度与調制的方法有关。在某些业务中，适当选择或变更調制方法，可以增大頻率分量密度，并改善頻譜的利用。

最近时期，許多人研究調制方法，借以确定被占用波道的利用效率和抗拒进入波道的干扰作用的效果。

通过抑制一些頻率分量（这些頻率分量重复了包含在另一部分分量中的信息）的办法，可以使調制方法得到改进。例如，可采用将載波与一个边頻帶完全抑制的調制系統。由于設備的情况不正常或調整的状况不适当，常常使无綫电台，特别是通信用无綫电台所发射的頻譜，比它所需要的頻譜寬若干倍。

其次，还存在着一个頻差容限的問題。可以毫不夸大地說，任

何一种限制传输所占频带宽度的技术措施，若不大大地缩小发射机频率不稳定性的容限，都不能改善频谱的利用。

接收机频率不稳定性的容限也很大；而且许多业务的接收机选择性也是不够的。发射机与接收机的频率不稳定性，迫使波道间增加分隔，从而大大地增加了所占用的频带宽度。这通常要比必要的频带宽度大若干倍。

由于有必要提高频谱利用的有效度，要求采取一系列的科学技术措施：

1. 系统地探求在整个频段内，最合理地配置数量最大且互相干扰最低的电台的方法。

2. 将传输所占用的频带宽度限制到接近于必需的频带宽度值。载波偏移的频差容限只应当为波道宽度的一小部分。

3. 消除使防护频带加宽的那些设备上的缺陷，亦即：提高发射机与接收机振荡器载波频率的稳定性，提高接收机的选择性，规定适当的调制度。

4. 运用最有效的调制方法，以保证最佳地利用所占用的波道（特别是对那些宽频带的业务，例如调频式超短波广播与电视）。

5. 限制电台在其工作区域范围以外所产生的干扰电平，为此，可以降低发射机的功率，抑制谐波辐射，使载波同步（在这样做有实际意义的地方）以及使用定向天线。

6. 改进对频谱占用情况的监督和观察方法，特别是改进对辐射所占用频带宽度的监督。

尽管对无线电信号频谱的研究有很大的实际意义，但这个问题研究得仍很不充分，其原因在于研究上述问题时，遇到了理论上与实际上的一些困难。这只需提一下下面的事实就足以说明。权威的学者与无线电工程师如弗列米格(Флеминг)，在不算太早的1930年，就在《自然》(Nature)杂志上开展的一次辩论中提出^①，证明有实际

^① 这次辩论的详细信息见斯·姆·雷托夫(С. М. Рытов)的著作[文献8]与[文献10]。

意义的只是“已調制的載波”，而边頻帶——它是計算的方法与数学上的虛构，并不符合于实际情况。

正如斯·姆·雷托夫所正确指出的那样，由此所得到的結論談起来絕對不是什么高深的东西，而是十分迫切和实际的問題。因为根据弗列米格的見解，如果是一个唯一的載波頻率的話，那末就沒有任何根据来确定无綫电台之間的頻率間隔，而“以太”的填充浓度将仅受接收机选择性的限制。尽管很自然地，弗列米格不能始終坚持他的不正确的观点，然而毫無疑問，他否认边頻率的现实性，却延滯了对无綫电通信波道所占頻帶寬度問題的研究。在和弗列米格辯論以后，文献中也还遇到在这个問題上的一些錯誤的言論。

在頻譜概念的发展方面，恩·恩·安得列夫(И. И. Андрев)，在1917年曾进行过科学研究，并写出了专题論文[文献1]，在該論文中，以現代的水平，論述了应用頻譜概念来分析电振蕩的問題。

勒·依·馬杰里什坦(Л. И. Мандельштам)和他的学生格·斯·戈列里克(Г. С. Горелик)和斯·姆·雷托夫的工作，以及近年来А. А. 哈尔凱維奇(А. А. Харкевич)的著作[文献23]，均在这个領域中起了巨大的作用。直接与无綫电頻率的利用有關的問題的解法，在姆·符·舒列基(М. В. Шулейкин)[文献22]，符·阿·柯捷里尼可夫(В. А. Котельников)[文献4]，符·伊·西費罗夫(В. И. Сифоров)[文献7]等人的著作中可以見到。

2. 作为信号物理特性的頻帶寬度

为了确定利用信号所可能傳輸的消息数量，并闡明信号特性与通信波道性质之間的关系，必須引入某些能从物理意义上能表征信号的量[文献28]。

如果信号可以某个時間函数来表示，那末，当我们不管用怎样方法确定了这个函数时，信号也随着被确定了。然而，并非总有必要对信号作如此完整的描述。在許多情况下，仅限于更一般的描

述，規定少数綜合測量就已經足够了。通常在通信理論中，为了描述信号的一般性质，采用三种測定：信号的持續時間，信号超过干扰的数值以及信号頻帶的寬度。后者十分方便地表明信号許多重要的性质。通常將这三个量的乘积称为信号容积。如果取干扰为在滤波器通頻帶中具有均匀分布頻譜的噪音，且服从于正态分布規律，那末，如所周知，对理想的系統而言，波道的通过能力將等于

$$C = F \log_2 \frac{P + N}{N} \text{ (每秒二进单位),} \quad (\text{B.1})$$

式中

- C ——波道的通过能力；
- F ——波道頻帶的寬度；
- P ——信号的功率；
- N ——干扰的功率。

由上述公式可以看出，增加頻帶的寬度，或者增大信号的功率（相对于干扰的功率而言），均可提高波道的通过能力。在滿足实有波道通过能力下，可以考虑增大信号对干扰的比值，亦即增大发射机的功率，来减小頻帶的寬度。然而应当指出，节约頻帶所花的代价是十分高的，因为随着功率 P 的变化，对数值变化得很緩慢。例如，当信号对干扰的比值为 30 分貝时，为了补偿 10% 的頻帶减小，需要将发射机功率增大一倍。

由公式(B.1)可以看出，在決定通信波道通过能力的諸参数中，頻帶寬度起着何等重要的作用；在理想的通信系統中，变更頻帶寬度对波道通过能力的影响，要比变更发射机功率大得多。这个結論十分重要，它說明了需很珍惜地利用頻帶寬度的必要性，因为很明显，增大功率是要花费很大的投資才能达到的。

3. 有关无线电信号頻譜的一些基本概念和定义

为了探討有关在无线电頻段內通信波道的配置問題，必須精確

地确定每一条波道所占的頻帶寬度。

无綫电报信号的持續時間有限，因此，它們的頻譜一直延續至无穷。故从理論上來說，傳輸这种信号要占用无限寬的頻帶。然而，这一理論上的說明并不会使我們得出任何实用結論，因为无綫电通信所用信号的絕大部分能量，集中在比較狹窄的頻帶中，而距中心頻率較远的頻譜部分，对保持通信并无多大意义。

为了实际确定傳輸所占“位置”，我們不得不在相当任意的程度上，选择預定用来實現通信的輻射功率部分。如果功率的这一部分选定了，那末，根据能量在頻譜中的分配，就可以确定包含有这部分功率的頻譜部分，从而确定所占的頻帶寬度，亦即該种輻射占用的波道寬度。

实际上，可以从两条途径来确定被占用頻帶的寬度：

1) 根据頻率值 ω_k ，在这种頻率下，頻譜的模 $|F(\omega_k)|$ 的值为共最大值的某一部分，亦即

$$\frac{|F(\omega_k)|}{|F(\omega)|_{\text{最大}}} = \frac{1}{d},$$

式中 $d > 1$;

2) 根据頻率值 ω_k ，这个頻率限定着一个頻譜区域，在这个区域内包含有頻譜全部功率的主要部分。

有时候第一种頻帶寬度的定义称为“几何性的”，而第二种頻帶寬度的定义称为“能量性的”。利用此两定义中的任意一个，都可以获得頻帶寬度值，此頻帶寬度值，在一定程度上計及了形成該信号的頻譜的最重要部分。对于每种信号形状，均可确定在此頻帶中的功率的相对含量与在其边缘上的頻譜分量电平之间的对应关系。

在无綫电通信規程[文献 43]与国际上有关的建議[文献 40]中，载有下列被占用頻帶寬度的“能量性”定义：如下的一种頻帶寬度称为被占用的頻帶寬度，即在該頻帶的下界和上界以外，平均的輻射功率均等于該輻射全部的平均功率的 0.5%。

在某些情況下，例如，在頻率复用的多路系統，当实际采用被

占用頻帶寬度或必需的頻帶的定義時，0.5%的數值可能會造成一定的困難；在這種情況下，另一種百分含量規定就可能有效一些。

應當指出，係數0.5%這個數值是无綫電通信規程與有關國際會議任意選定的，並沒有理論根據。所能確定的是，由於傳輸持續時間有限的信號時，信號的功率是分配在無限寬的頻帶上，故在定義的頻帶中，功率的百分含量應當小於100%。因為包含輻射功率99%的頻帶，大致與優質地重現信號（它具有實際上允許的圓化）所必需的頻帶相當，故從實際觀點來看，係數0.5%在許多情況都是方便的。

儘管係數0.5%是任意選定的，然而上述頻帶寬度的定義在廣泛應用中却是方便的，應當將它看作為國際使用的慣例。如果在廣泛應用中引入某一新的定義，則妨礙了互相比較測量結果的可能性，並使測量問題過分複雜化。

因此，我們將採納，並在以後利用上述無線電通信規程與國際上有關建議中所採用的“被占用頻帶寬度”的定義。

只可能靠變更信號的形狀來減低一給定持續時間的信號輻射所占用的頻帶寬度。如所周知，圓化了的信號所占用的頻帶寬度比矩形信號小。經驗指出，被圓化到某一程度的信號，在接收時是容易按要求的質量重現的。然而，過度地圓化可能影響接收消息的質量，例如，錯誤的相對數目可能超過規定標準。因此，我們來談一下必需的頻帶寬度的概念。無線電通信規程[文獻43]與國際上有關文獻[文獻40]建議：必需的頻帶寬度就是輻射所占用頻帶寬度的最小值，以此寬度，該類輻射將能充分保證消息以一定的速度和質量進行傳輸，以滿足在一定條件下運用的系統的要求。

在附錄I的表中，給出不同種類輻射所必需的頻帶寬度值，該表系根據[文獻43]中所列的數據編成的。

如果輻射所占用的頻帶寬度等於必需的頻帶寬度，則輻射是完善的。這就意味着，傳輸所利用的信號，其圓化程度，應能夠保證所需質量的通信。採用更寬的頻帶是多余的，但採用更窄的頻帶，

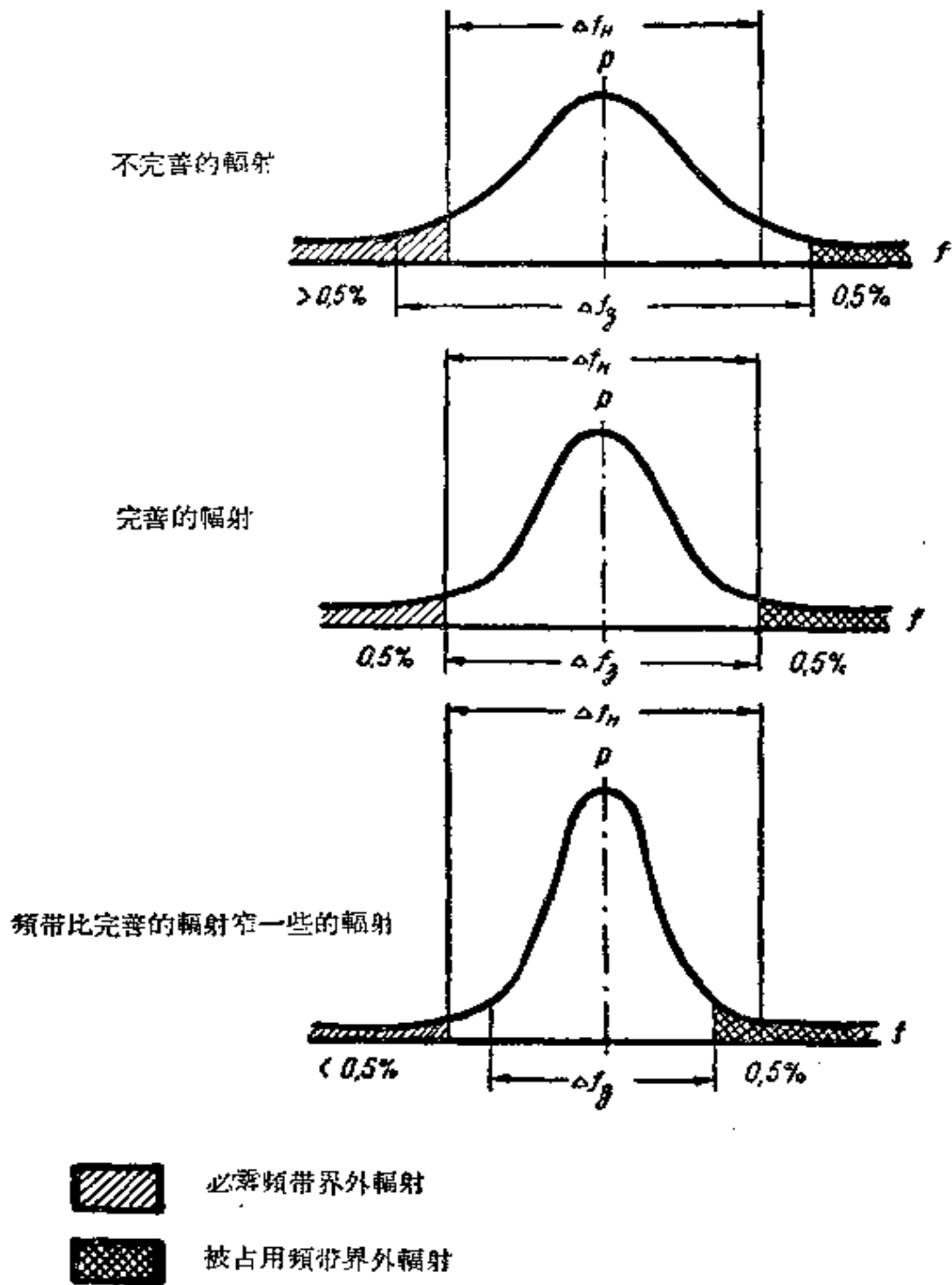


图 B.1. 表明被占用的頻帶寬度、必需的頻帶寬度与帶外輻射的定義的曲綫。頻譜假定是对称的：
 Δf_H ——必需的頻帶寬度；
 Δf_a ——被占用的頻帶寬度

則可能使通信质量坏到不能容許的程度。

在指配发射机的频率和确定預定用来接收这种发射的接收机的通带宽度时，被占用频带宽度与必需频带宽度是两个重要因素，应当加以考虑。

然而，无线电信号频谱并不受辐射所占用的频带的限制，而按上面采用的定义，应受频带外辐射 1% 功率所限制。虽然辐射的这一部分并未作用于調諧在辐射频率的接收机上，但它可能在邻近的波道中造成干扰。由此就产生带外辐射的概念。通常 [文献 40] 将必需的频带宽度界外所辐射的功率算作带外辐射。

例如象抑制载波这样的辐射，对接收设备的正常工作有利，系属于必需的频带宽度，而不属于带外辐射。

引用带外辐射的概念，有便于确定辐射的相对不完善性 (图 B.1.)。

4. 本书討論的問題

1. 怎样以数学形式来表示信号,使最适于解决与研究频谱有关的实际問題?
2. 信号应当具有怎样的形状,于传输时方能利用最小的频带?
3. 传输各种不同形状的信号各占用什么样的频带?
4. 传输时占用的频带宽度与信号建立时间之間有什么关系?
5. 信号形状如何影响传输占用频带的界外辐射?
6. 在最常用的键控形式下,脉冲辐射占用什么样的频带?
7. 波道中的延迟时间对信号频谱及通信波道通过能力有何关系?
8. 有規則的信号序列的频谱与随机的信号序列的频谱有何关联?
9. 如何确定传输与实际消息相应的随机信号序列占用的频带宽度?
10. 无线电信号频谱与无线电接收机的不同特征对波道間的互

相干扰有何影响?

11. 如何在无线电发射机中实际形成信号?
12. 什么方法是测量无线电报辐射占用频带宽度的最佳方法?

第一章 信号的数学表示形式 与频谱概念

本章提出信号表示所应满足的一些要求,并指出在解决许多实际问题时,宜于将信号 $g(t)$ 表示为和

$$g(t) = \sum a_n \psi_n(t) \quad (A)$$

的形式。

讨论了利用指数函数表示信号的优缺点,并说明如何由此种表示导出频谱的概念。

指出只有当函数系 $\psi(t)$ 为完备的情况下,才可能有如 (A) 的展开形式;如果该函数系又是正交的话,则系数 a_n 的计算可以简化。

研究了将信号表示为延迟函数级数的形式,并指出在研究非周期信号的频谱时,采用此方法特别有利。

§ 1.1. 信号表示的一般概念

为了将信号表示为数学的形式,譬如表示为抽象符号 G 的形式,必须首先明确地肯定表示中所希望反映的一些性质。例如,现在来研究一下语言的信号。我们可能对它的形状、清晰度或含意感兴趣。诚然,信号的这三个方面相互间有关联,但这并不意味着对这些方面中的一个(例如它的形状)表示得好,就相应于对其他方面(例如含意)表示得也好。

因此,对信号的表示必须加某些限制。其中第一个限制在于,我们所企图表征的将是通常称为信号“形状”的那一方面的 G ,并以时间的函数形式给出。其次,要求我们的表示能减轻计算量,使得对线路的分析和对信号形成与传输时所发生过程的研究比较容易。

如果 G 以时间函数 $g(t)$ 的形式给出, 则对这种表示还要提出一个要求: 它应当允许将所研究的、待表示的问题分解为一些组成部分, 解决这些组成部分要比解决原来的问题容易些。然后我们应当有可能将这些单独的部分加在一起, 以便得出整个问题的解答。这样的步骤可以称为逻辑叠加。

借引用作用于复杂系统的复杂信号来解决大多数实际问题时, 不仅需要逻辑叠加, 而且要将过程或现象本身分解为一些组成部分, 亦即进行物理叠加。为此, 所述过程中的信号至少应当是接近于线性的。因此, 甚至在研究那些原理上属于非线性的系统 (例如调制器) 时, 通常也是力求将非线性问题化为参数随时间变化的线性问题。

在线性问题中, 上述的逻辑步骤归结为将 $g(t)$ 表示成根据一定方式选定的振荡形式 $y_n(t)$ 的适当序列之和, 即表示为

$$g(t) = \sum a_n y_n(t). \quad (1.1)$$

的形式。

$y(t)$ 的选择应使我们所感兴趣的问题解决起来最为方便。

§ 1.2. 指数函数的利用

所谓指数函数, 可以理解为 Ae^{pt} 形式的函数, 式中 A 及 $p = p_1 + i p_2$ 为任意复数, 而 t 为实数时间。利用这一类函数将信号表示为比较简单的函数和的形式, 是研究得最多和最有用的。根据著名的欧拉公式

$$Ae^{pt} = Ae^{p_1 t} (\cos p_2 t + i \sin p_2 t),$$

可以很容易地用正弦与余弦函数来表示指数函数。这一类函数的性质不因进行微分与积分运算而有所变更。

解常系数线性微分方程的问题, 可化为对这一类函数进行代数运算, 因而可以利用运算微积。

从将信号表达为指数函数之和 (特别是谐函数之和) 出发, 也阐明了频谱的概念。正弦振荡对我们关于外部作用在实际物理系统

中的直观表示有所补充，并使我們集中注意力于系統的一些重要特性，这在其他表示形式中是不够明显的。

与此同时，虽然利用指数函数表示信号使問題的解决大为簡化，但是这种表示导致某些方法学上的困难。例如，我們談到在有限的頻譜范围内系統的响应，其实这在原理上是不可能的。此外，在任何足够复杂的情况下，我們只能以迂迴的方式来表示与实际信号相当的、某一时间范围内所发生的情形。

下面我們更詳細地討論将信号表示为指数函数之和的形式的问题。指数函数

$$x(t) = Ae^{pt} \quad (1.2)$$

的基本性质在于，它是定常綫性变换的特征函数。現在來說明这一点。假定我們有变换 T （例如滤波运算），它分別将 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 变换为 $y_1(t)$, $y_2(t)$ 。用符号可以写为

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= T x_1 \\ y_2 &= T x_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

的形式。

如果变换保持叠加原理，也就是說如果能滿足关系式 $T(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = a_1Tx_1 + a_2Tx_2 + \dots + a_nTx_n$ 。 (1.4) 則称之为綫性变换。

如果变换的作用与时间的起始計算点无关，也就是說，假設对所有被变换函数 $x(t)$ ，若有

$$Tx(t) = y(t), \quad (1.5)$$

則有

$$Tx(t+\tau) = y(t+\tau),$$

那末，我們將称变换为“定常的”。

可以証明，对于(1.2)形式的指数表示式而言，定常綫性变换 T 可以化为被变换函数 $x(t)$ 乘以仅与指数 p 有关的复数 $z(p)$ ，亦即

$$T[x(t)] = z(p)x(t). \quad (1.6)$$

具有关系式 $Tx(t) = \text{常数} \cdot x(t)$ 的函数 $x(t)$ ，称为变换的特征函数，而常数称为对应的特征值。在等式 (1.6) 中， $z(p)$ 为对应于特征函数 $x(t) = e^{pt}$ 的特征值。

线性定常变换以指数函数 e^{pt} 作为特征函数的重要意义在于只要我們一旦找到计算特征值的规则，那末对任意函数

$$x(t) = \sum A_k e^{p_k t}$$

都可以写出

$$Tx(t) = \sum A_k z(p_k) e^{p_k t}$$

的形式。这是因为对线性变换 T 而言，叠加性质 (1.4) 是满足的，且 $e^{p_k t}$ 为变换 T 的特征函数 [亦即 $T e^{p_k t} = z(p_k) e^{p_k t}$]。

如果依次应用若干次线性变换时，则变换后的函数形式为

$$T_1 T_2 \cdots T_n x(t) = \sum z_1(p_k) \cdots z_n(p_k) A_k e^{p_k t}, \quad (1.7)$$

式中 $z_1(p_k), \cdots, z_n(p_k)$ 为对线性变换 T_1, \cdots, T_n 而言、相应于特征函数 $e^{p_k t}$ 的特征值；并且 $z_1(p_k)$ 相应于变换 $T_1, \cdots, z_n(p_k)$ 相应于变换 T_n 。

在下列情形下，信号线性变换的乘积也可化为简单地相乘，即函数 $x(t)$ 以指数表示式的积分形式代替共和式，亦即当形式为

$$x(t) = \int_c f(p) e^{pt} dp$$

时，有

$$T_1 T_2 \cdots T_n x(t) = \int_c z_1(p) z_2(p) \cdots z_n(p) f(p) e^{pt} dp. \quad (1.8)$$

上述形式的变换是大家很熟悉的：当适当地选择积分路径 $C = (-i\infty, +i\infty)$ 时，(1.8) 式成为傅里叶变换， $f(p)$ 即为信号频谱，而 z_1, z_2, \cdots, z_n 为滤波器 T_1, T_2, \cdots, T_n 的传输函数，且 $p = i\omega$ 。

对于由有限数目的元件所组成的集中参数系统而言，运算 T 可以写成常系数、常积分-微分方程，且 $z(p)$ 取有理分式

$$z(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} \quad (1.9)$$

的形式，式中 P 与 Q 为有限项数的多项式。

由于在电滤波器中的自由度（储能的独立形式）数目少，故 $z(p)$ 中的极点与零点数目也少。这些极点与零点的分布，在理论上可给出滤波器对信号作用的简单图形。

在这种系统中的过渡过程可以按公式

$$u(t) = \sum_{k=0}^n z_k e^{p_k t} \quad (1.10)$$

来计算。

以上所列举的一些线性变换，只有在信号 $u(t)$ 能表示为指数表示式的和 (1.7) 或积分形式 (1.8) 时才适用。有许多物理上的信号属于能表示为傅里叶级数（参阅第六、七章）或傅里叶积分（参阅第二、三、五章）的函数类型，亦即它们能表示为任何形式的频谱。然而，在原理上可将信号表示为频谱的形式，并不意味着用这种表示在实际上是合理的，因为计算运算可能太繁复了。也存在着这样一些信号，不仅从方便的观点来看，而且从原理方面来看，一般的傅里叶级数或傅里叶积分的频谱表示对它们都是根本不适合的。所有随机时间函数就属于这种信号类型。语言就是其一例。可以借指数函数来表示语言 $u(t)$ 的任意有限区段，但如果讲话者在谈话时语言中含有新的内容，而这些内容与对应的 $f(p)$ 大不相同，则分析的区段不断地扩展，从而振幅频谱 $f(p)$ 不再存在。

对于随机函数，通常引入更方便的能量频谱的概念，它与信号的统计参数有关，亦即与它的自相关函数有关 [希契 (Хищин) 定理]。

能量频谱的意义对许多问题就象信号本身的意义一样地有用。然而信号不能从能量频谱得出来。因此，必须寻求某些其他的信号表示方法。

§ 1.3. 正交性与完备性

当将信号表达为 (1.1) 的形式时，必须首先能确定系数 a_n 。

如果函数系 $y_n(t)$ 为正交系时，这些系数的确定极其简单。

如果在区间 (t_1, t_2) 讨论信号 $g(t)$ ，且函数 $y_n(t)$ 满足条件：

$$\int_{t_1}^{t_2} y_m(t) y_n(t) dt = 0, \text{ 当 } m \neq n, \quad (1.11)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} y_m^2(t) dt = 1, \quad (1.12)$$

则函数系 $y_n(t)$ 称为正交且归一化（或称法化）的[因为积分(1.12)等于1]，或法正交的。

在展开式(1.1)中的系数 a_n 由公式

$$a_k = \int_{t_1}^{t_2} g(t) y_k(t) dt \quad (1.13)$$

确定。

再者，当将信号表示成级数(1.1)的形式时，必须使差值

$$g(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t)$$

在一定的意义下很小。通常这个差值“小的程度”是以积分

$$\int_{t_1}^{t_2} \left| g(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right|^2 dt \quad (1.14)$$

“小的程度”来确定。

如果当 $n \rightarrow \infty$ 时，积分(1.14)的极限等于零，则我们将称等式(1.1)右边的级数“按均值收敛”于函数 $g(t)$ 。

当我们假定了(1.1)形式的级数应当按怎样的意义收敛以后，产生了两个问题：是否存在这样一个这些级数按上述的意义收敛于它的函数，以及这种函数是否是唯一的。利用正交函数系的完备性的概念，可以得出这些问题的解答。

如果对于一个 $y_n(t)$ 形式的正交函数系，不可能存在一个不恒等于零的函数^①同时与所有的 $y_n(t)$ 正交，亦即由等式

① 确切地说，应为“……一个不恒等于零的连续函数……”——译者注

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)y_n(t)dt=0,$$

对于任意的 n , 应当有 $g(t) \equiv 0$ 时, 则我们称 $y_n(t)$ 形式的正交函数系是完备的。

如果函数 $y_n(t)$ 为完备系, 则容易证明, 级数 $\sum a_n y_n(t)$ 只按“均值意义”收敛于一个极限; 实际上, 令

$$g_1(t) = \sum a_n y_n(t)$$

及

$$g_2(t) = \sum a_n y_n(t).$$

根据级数的系数 a_k 的公式(1.13), 得到对任意 k 有

$$\int_{t_1}^{t_2} [g_1(t) - g_2(t)]y_k(t)dt = a_k - a_k = 0$$

根据函数系 $y_k(t)$ 的完备性和上面的等式, 必定有

$$g_1(t) - g_2(t) \equiv 0,$$

或

$$g_1(t) \equiv g_2(t).$$

因此, 我们对上面所提出的第二个问题作出了回答, 并且指明, 级数(1.1)不可能按均值意义收敛于两个不同的函数。

从数学观点来回答第一个问题是比较复杂的; 对工程师来说这却并不困难, 因为工程师寻求已知信号的级数表示形式常比解决相反问题(即综合问题——译者)更擅长一些, 他们所关注的是如何将已知的级数收敛为某一个信号。

函数展开为广义傅里叶级数的基本定理回答了第一个问题, 该定理断定, 如果数项级数 $\sum a_n^2$ 收敛, 则对任何形如(1.1)式的、具有系数 a_n 的函数的级数, 存在有在区间 t_1, t_2 上平方可积的函数 $g(t)$, 而级数(1.1)按均值意义收敛于 $g(t)$ ①。

里沙-费歇尔(Рисс-Фишер)定理的第二部分回答了这样一个问题, 即用级数(1.1)表示的函数应当具备什么样的性质。它断定所

① 我们在此引用了里沙-费歇尔定理的一种稍加变化的叙述形式

有在区間 t_1, t_2 上平方可积的函数，能展开为(1.1)形式的級数，且該級数按均值意义收敛于該函数。

在区間 $(0, 2\pi)$ 上，完备法正交函数系的一个特殊情形为下列形式的函数系

$$\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t, \dots$$

在区間 $(0, 2\pi)$ 平方可积的函数通常可按这个函数系展开，并且以一般傅里叶級数的形式周期地延續至整个数轴上，这級数按均值意义收敛于該函数。

在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上为完备正交函数系的另外一个例子为下列形式的函数：

$$\frac{\sin 2\pi F \left(t - \frac{n}{2F} \right)}{2\pi F \left(t - \frac{n}{2F} \right)},$$

具有有限頻譜且定义于 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的函数，通过此函数可展开为柯捷里尼可夫(Котельников)級数

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \frac{\sin 2\pi F \left(t - \frac{n}{2F} \right)}{2\pi F \left(t - \frac{n}{2F} \right)}. \quad (1.15)$$

当将函数 $g(t)$ 表示为級数(1.15)形式时所遇到的困难在于，一般的信号均具有有限的持續時間。因此，它們只能近似地表示为級数(1.15)。所以是近似的在于，信号能以任意的形式延續至它的存在区間以后。从工程师的角度来看，最自然的是认为在給定区間以外， $g(t)$ 等于零。然而，此时信号具有无限的頻譜，必須把它截断，故以(1.15)的級数形式表示信号只能是近似的。于是，我們須作下列二者之一的选择：或者限于討論那些以唯一的形式延續于存在区間范围以外的信号（例如解析信号，它由其存在区間中任意一点的数值与所有的导数值来确定），或者满足于对截取頻譜所得到的近

似。

在某些情况下，我們由解微分方程来得到信号，例如，当确定占有最小频带的有限持续信号的形状时就是如此，此时，微分方程的解通常表示为微分方程特征函数的级数形式。

§ 1.4. 延迟函数的方法

为了表示信号，可以利用由下列方式构成的延迟函数方法。根据某种考虑选定基本信号 $y(t)$ ，由它按照公式

$$y_n(t) = y(t - n\theta)$$

构成延迟函数 $y_n(t)$ 。

式中

θ ——延迟的时间间隔；

n ——延迟函数的号数。

当对信号加某些限制时，可以将它表示为级数

$$g(t) = \sum_n a_n y_n(t) \quad (1.16)$$

的形式。

如果延迟函数系为完备的，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} y_n^2(t) dt$ 为有限值时，这种表示适用于在 $-\infty < t < +\infty$ 上确定的函数。信号 $g(t)$ 应当具有有限的能量，亦即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt < \infty.$$

在通信系统中所利用的许多信号，乃是自然的延迟函数级数，例如，由形状任意但持续时间相同的脉冲所组成的电报信号就是如此。

然而并不是所有的有限持续信号都能以级数 (1.16) 的形式表示，因为如果信号 $g(t)$ 从时刻 t_1 延长至 t_2 ，则在间隔 $(t_2 - t_1)$ 中，

仅有有限个数目、且持续时间固定的延迟函数。如由级数理论大家知道，任何一个有限的函数系不可能是完备的。从而一般说来，(1.16)式的右边不可能按“均值”意义收敛至左边。

为了表示有限持续时间的信号，可以利用形式为

$$y_{mn}(t) = y(t - n\theta) e^{i2\pi m \frac{t}{\theta}} \quad (1.17)$$

的函数，式中因子 $e^{i2\pi m \frac{t}{\theta}}$ 决定了频率 $\frac{2\pi m}{\theta}$ 。

于是，信号的展开形式为

$$g(t) = \sum_n a_{mn} y_{mn}(t). \quad (1.18)$$

展开式(1.18)能够将有限持续信号 $g(t)$ 表示为函数 $y_{mn}(t)$ 的展开式， $y_{mn}(t)$ 既对时间延迟，也对频率延迟。

柯捷里尼可夫级数(1.15)是运用延迟函数方法的例子。由前面的论证可以看出，仅对于在无穷区间 $-\infty < t < +\infty$ 上已知的函数才能这样展开，而用此级数来表示有限持续的信号只能具有一定的近似程度。

在研究非周期信号（例如随机信号序列）的频谱时，延迟函数方法的优越性特别明显。这些信号的振幅频谱与能量频谱均可表示为两个谱函数的乘积形式，其中一个谱函数仅与基本信号的形状有关，另一个谱函数则与被传输的信息的特性有关。

第二章 在給定頻帶中包含有最大 部分能量的有限持續信号

本章起始部分討論信号与頻譜間的关系式，并且指出，將无綫电通信中所用的信号当作具有有限持續时间的信号是最恰当的。其次，从理論上探討了这样一个問題，即有限持續的脉冲应当具有什么样的形状，才能在給定的頻帶內包含頻譜总能量中的最大部分。

确定了包含有最佳形状脉冲的总能量99%的頻帶寬度。給出了当頻帶中含有較大能量时确定最佳形状脉冲的近似公式；同时指出在这种情形下，脉冲在時間区間 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq +\frac{\pi}{2}$ 中具有高斯分布型的曲綫形状。

§ 2.1. 信号与頻譜間的某些关系

大家都知道这样一个事实，時間函数和它的頻譜不可能被同时限制在任意小值以內。在傅里叶变换[文献 17, 第 19 頁]中变更标度就可以說明这一点。

$$\frac{1}{\lambda} f\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.1)$$

如果 $U(t)$ 为某一脉冲，則当 $\lambda > 1$ 时， $U(\lambda t)$ 是具有同一形状的較狭窄脉冲；而頻譜分布 $\frac{1}{\lambda} f\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$ 比原来的頻譜 $f(\omega)$ 要寬 λ 倍。時間函数与其相应的頻譜間的这种关系是由下面的原因所决定的，即在傅里叶正向与反向变换的被积表示式的指数中，变量 t 与 ω 均以相乘积的形式出現。

在脉冲形状与脉冲頻譜之間的另一关系如下：不可能同时将脉冲的頻帶寬度与持續時間限制在一个有限的区間以內，而使它們完全不出現在这区間的界限之外。这个关系可以証明如下。

如果

$$|U(t)| < M e^{-\alpha|t|}, \quad (2.2)$$

則

$$f_1(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-pt} dt. \quad (2.3)$$

在区域 $-\alpha < \text{Re} p < \alpha$ 中将为解析函数。这个结果见 [文献 5, 第 3 页], 它的理论根据如下: 解析函数的均匀收敛的积分本身也是解析函数 [文献 20, 第 118 页]。由 $f_1(p)$ 的解析性可知, 这个函数在虚轴上的所有零点均应当为孤立点 [文献 20, 第 106 页]。

如果在有限的区间 τ 以外, 函数 $U(t)$ 等于零, 则当适当地选择参数 α 时, 该函数满足条件 (2.2), 因此, 根据 $f_1(p)$ 的所有零点均为孤立点的理论, $f(\omega)$ 只能在孤立点上消失, 而不会在有限的频率区间内消失。

勒·依·馬杰什坦 (Л. И. Мандельштам) 提出了寻求脉冲持续时间与其频谱宽度的乘积的问题。在相当一般的假定条件下, 这个问题在 1934 年由阿·格·馬叶洛 (А. Г. Майером) 与叶·阿·列托維奇 (Е. А. Леонтович) 在 [文献 6] 中解决了, 该文指出上述两个量间存在着与物理学中的不确定性关系相类似的联系, 并对这两个量的乘积的下限进行了估计。

在 [文献 6] 中的工作方法是以前·斯·諾維科夫 (П. С. Новиков) 的手稿作基础的, 该手稿没有刊登出来, 且大概是遗失了。后来, 格·姆·日斯利 (Г. М. Жислин) 在 [文献 41] 中严格地论证了 [文献 6] 中所采用的方法。

1946 年, 加鲍尔 (Габор) 在 [文献 11] 中再次研究了这个问题, 他将集中于某一个平均值周围的时间函数的均方根值称为“有效的持续时间”, 而将集中于某一个平均频率周围的频谱的均方根值称为“有效的频谱宽度”。应当指出, 由于“有效持续时间”与“有效频谱宽度”本身的近似性, 它们对描述无线电通信所用的实际信号的性质的用处并不大。此外, 这些数量不便计算, 更不用说对某些形状的脉冲而言, 确定“有效频谱宽度”会引出发散的积分了。

最恰当的是將無線電通信中所用的信號當作為有限持續的信號，亦即將它當作為在一定時刻內開始和終了，且在這兩個時刻間的區間以外到處等於零的信號。這樣的假設，一方面很好地反映了信號的實際特性，同時也容許從數學上對它進行確切的研究，例如，可以採用“延遲”函數方法，確定脈沖的最佳形狀等。

通常所研究的和被綜合的脈沖形狀（例如矩形脈沖，梯形脈沖，余弦形脈沖等），都屬於有限持續的信號。在實際濾波器中所獲得的信號（這種信號的下降邊漸近地趨於零）也能够以任意的精確度作為有限持續的信號來表達。

基於上述的一些理由，我們將對具有有限持續的脈沖信號進行研究。下面要討論的問題，是有限持續的脈沖應當具有什麼樣的形狀，才能在給定的頻帶中包含頻譜總能量中的最大部分。為這種形式的脈沖找出能量在頻帶中的分布，並確定出包含有頻譜總能量99%的頻帶寬度，亦即確定與目前習慣採用的定義一致的頻帶寬度（參閱§ B. 3.）。

§ 2.2. 積分方程的建立

設給定脈沖寬度 τ 與頻帶 $-\omega_0 < \omega < +\omega_0$ 。我們希望確定脈沖 $U(t)$ 的形狀，使在上述頻帶中頻譜的部分能量

$$W(\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} f(i\omega) f^*(i\omega) d\omega \quad (2.4)$$

占脈沖總能量

$$\begin{aligned} W_{\text{總}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\omega) f^*(i\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} U^2(t) dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

的最大部分。

類似的問題在〔文獻 18〕中近似地解決了。由於採用新的方法

来解决此问题，本书作者也成功地获得了精确解，并利用了列成表的函数。

上式中 $f(i\omega)$ ——脉冲的幅度频谱

$$f(i\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} U(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.6)$$

而

$$f(i\omega) f^*(i\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} U(t) U(s) e^{i\omega(t-s)} dt ds. \quad (2.7)$$

将积分 (2.7) 代入 (2.4) 中，变更积分次序并按 ω 进行积分，得出

$$W(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} U(t) U(s) \frac{\sin \omega_0(t-s)}{t-s} dt ds. \quad (2.8)$$

于是，所形成的条件化为变分问题：在给定 ω_0 与 τ 的条件下来确定函数 $U(t)$ ，使得当

$$W_{\text{总}} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} U^2(t) dt = 1$$

时

$$W(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-s)}{t-s} U(t) U(s) dt ds, \quad (2.9)$$

为最大。

$W_{\text{总}}=1$ 的归一化，显然不会减低问题的普遍性。

在[文献 3，第 118 页]中证明，由于核

$$K(t, s) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_0(t-s)}{t-s} \quad (2.10)$$

的对称性与正定性，在任意有限的 ω_0 与 τ 下，变分问题 (2.9) 有解。此时

$$U_{\text{最佳}}(t) = \psi_1(t). \quad (2.11)$$

式中的 $\psi_1(t)$ 为下列弗雷德荷姆积分方程的第一基本函数（具有最小的正数 μ_1 ）

$$U(t) = \mu \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_0(t-s)}{t-s} U(s) ds, \quad (2.12)$$

此时在频带 $-\omega_0 < \omega < +\omega_0$ 中所达到的最大值为

$$\max W(\omega_0) = \frac{1}{\mu_1} = x_1,$$

或

$$\max \frac{W(\omega_0)}{W_{\text{总}}} = \frac{1}{\mu_1} = x_1. \quad (2.13)$$

§ 2.3. 确定信号部分能量的界限

在着手解积分方程 (2.9) 以前, 我们先来确定部分能量的界限, 亦即确定量 x_1 的界限。

当核 (2.10) 具有前述的一些性质时, 方程 (2.12) 的基本函数在区间 $(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$ 中构成法正交系 $\{\psi_n(t)\}$ 。同时根据 [文献 3, 第 128 页], 核可以表示为级数

$$K(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(t)\psi_n(s)}{\mu_n} \quad (2.14)$$

的形式。

假定在上式中 $t=s$, 并逐项进行积分, 得出

$$S_1 = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} K(t, t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n. \quad (2.15)$$

类似地, 将核的平方用两个和式代替, 并考虑到基本函数的法正交性, 得出

$$\begin{aligned} S_2^2 &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} K^2(s, t) dt ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

对所讨论的核而言，积分 (2.15) 与 (2.16) 可写为基本形式：

$$S_1 = -\frac{2k}{\pi}, \quad (2.17)$$

$$S_2 = \frac{1}{\pi^2} (4k \operatorname{Si} 4k - 2 \sin^2 2k + \operatorname{Ci} 4k - C - \ln 4k), \quad (2.18)$$

式中 Si 与 Ci 表示积分正弦与积分余弦，而 $C=0,577216\dots$ 为欧拉常数。

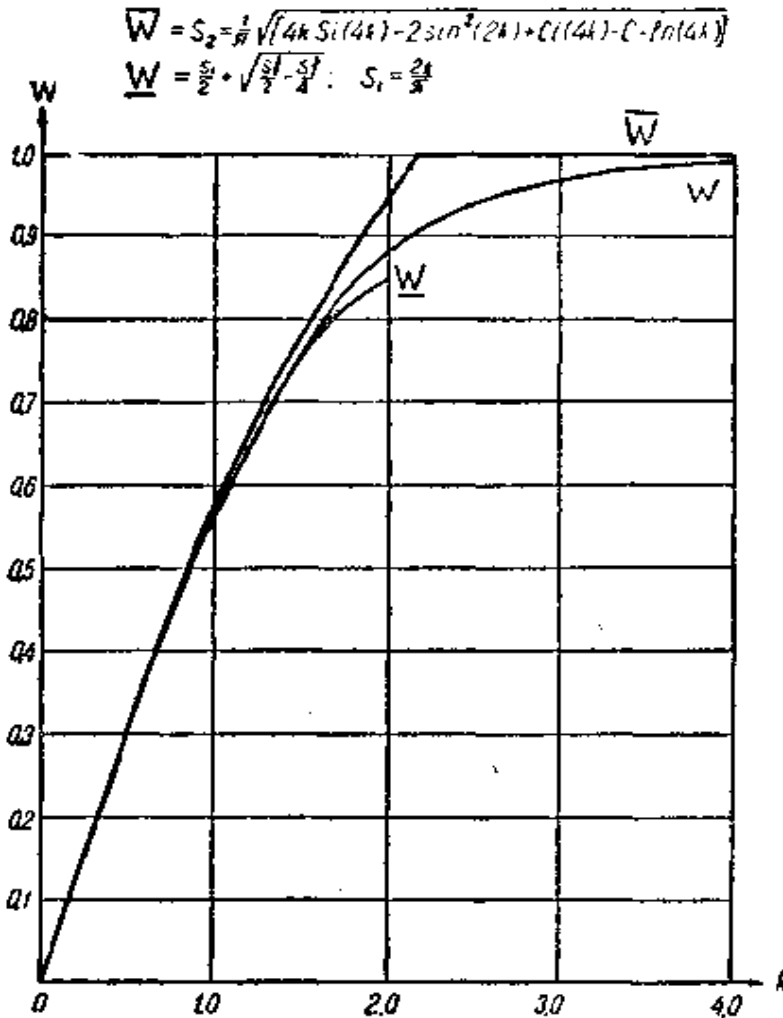


图 2.1. 包含有限持续信号最大部分能量的界限与 W 的近似值

(2.17) 与 (2.18) 之值通过唯一的参数

$$k = \frac{\omega_0 T}{2} = \frac{\pi}{2} \Delta f T, \quad (2.19)$$

来表示。

式中

Δf ——频带总宽度，单位为赫；

$$\Delta f = \frac{1}{2T} 2\omega_0.$$

根据 (2.16)，我们取

$$\overline{W}(k) = S_2(k) \quad (2.20)$$

作为 (2.10) 的上限。

为了求出下限，考虑到由于基本数[文献 3，第 122 页]为正的
性质

$$(S_1 - x_1)^2 = \left(\sum_{n=2}^{\infty} x_n \right)^2 > \sum_{n=2}^{\infty} x_n^2 = S_2^2 - x_1^2.$$

对 x_1 来解上述不等式，求出

$$\underline{W}(k) = \frac{S_1(k)}{2} + \sqrt{\frac{S_2^2}{2} - \frac{S_1^2(k)}{4}}. \quad (2.21)$$

信号的部分能量的两个界限表示在图 2.1 中。

§ 2.4. 利用核的展开来求积分方程的近似解

为了解方程 (2.12)，我们在个别情况下利用[文献 15]中第 398
页上的公式

$$\frac{1}{st} \frac{\sin \omega_0(t-s)}{t-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\omega_0 t)}{\sqrt{t}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\omega_0 s)}{\sqrt{s}}. \quad (2.22)$$

展开式(2.22)可以用来构成逼近于(2.10)的退化核序列。在退
化核[文献 3，第 106 页]的情形下，积分方程的求解化为求积分与
解线性代数方程组。

先作代換

$$x = \omega_0 t$$

并記为

$$U(t) = U_1(\omega_0 t). \quad (2.23)$$

按照(2.19)式的定义, 方程(2.12)具有

$$U_1(x) = \mu \int_{-k}^{+k} U_1(y) \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy. \quad (2.24)$$

的形式。

在公式(2.22)中保留級数的 N 項, 将方程(2.24)的近似解写为和

$$U_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{\sqrt{x}} J_{m+\frac{1}{2}}(x). \quad (2.25)$$

的形式。

将(2.24)中的核用上述近似式来替代, 而将 $U_1(x)$ 按(2.25)写出, 令左右两边指标相同的貝塞尔函数的系数相等, 得出齐次綫性方程組

$$\frac{a_m}{2m+1} = \mu \sum_{n=0}^N P_{n,m} a_n, \quad m=0, 1, \dots, N. \quad (2.26)$$

对称矩陣 $\|P_{n,m}\|$ 的元素为

$$P_{m,n} = P_{n,m} = \frac{1}{2} \int_{-k}^{+k} J_{n+\frac{1}{2}}(x) J_{m+\frac{1}{2}}(x) dx. \quad (2.27)$$

积分(2.27)的值列在[文献 15, 第 167—168 頁]与[文献 14, 第 237 頁]中。

$$P_{m,n} = \frac{1}{m+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\pi} \text{Si}(2k) - \sum_{n=0}^{m-1} J_{n+\frac{1}{2}}^2(k) - \frac{1}{2} J_{m+\frac{1}{2}}^2(k) \right], \quad (2.28)$$

亦即如果 $n+m$ 为奇数, 則

$$P_{n,m} = 0, \quad (2.29)$$

如果 $n+m$ 为偶数, 則

$$P_{m,n} = \frac{k}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \left[J_{m-\frac{1}{2}}(k) J_{n+\frac{1}{2}}(k) - J_{m+\frac{1}{2}}(k) J_{n-\frac{1}{2}}(k) \right] - \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(k) J_{n+\frac{1}{2}}(k)}{m+n+1}. \quad (2.30)$$

由公式(2.29)得出結論, 綫性方程組(2.26)分为两个对应于 m 为偶数和奇数的 a_m 的独立的方程組。如果考虑到在公式(2.25)中, 函数为偶相当于指标为偶, 那末, 所得到的結果在物理概念上是很明显的。

§2.2 中所提出問題中的解 $U_1(x)$, 相对于区間 $-k \leq x \leq k$ 的中点应当是偶的。可以直接証明, 最佳的函数具有完全确定为偶的性质。事实上, 如果存在有与此相反的情况的話, 信号可以表示为偶数脉冲与奇数脉冲之和的形式, 它們的能量是綫性相加的。因此, 如选择两个脉冲, 使得比值(2.13)較大, 則可以发现, 脉冲的和并非最佳的。奇数的解在給定頻帶中点处有幅度頻譜的零点, 这样如不与問題的数学上的提法相矛盾, 也必然会在所有情况下和物理上的提法相矛盾。因此, 我們在奇数 m 时假定 $a_m \equiv 0$ 。

往后就按一般的途径进行計算。当已知系数(2.28)与(2.30)时, 要求化方程組(2.26)的行列式为零。于是获得对 μ 而言的 $\frac{N}{2} + 1$ 阶方程。确定該方程的最小正根, 求出系数 a_{2m} , 并从公式(2.26)与(2.13)求出脉冲的最佳形状, 和在这种形状下所达到的部分能量。

当 $N=0$, $a_0 \neq 0$ 而 $m > 0$ 时, 方程組(2.26)退化为一个方程, 由該方程中我們求出

$$x_1 = \frac{1}{\mu_1} \approx P_{0,0} = \frac{2}{\pi} \text{Si}(2k) - J^2_{\frac{1}{2}}(k). \quad (2.31)$$

所求的脉冲形状为零阶近似可以差任意乘数 a_0 的精确度来确

定。

$$U_{\text{最佳}}(t) \approx \frac{a_0}{\sqrt{\omega_0 t}} J_{\frac{1}{2}}(\omega_0 t), \quad |t| \leq \frac{\tau}{2}. \quad (2.32)$$

如同上面所指出的那样，对 $N=1$ 的情形，公式(2.31)与(2.32)不成立。

如 $N=2$ ，当最佳解表示为形式

$$U_1(x) = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \left[J_{\frac{1}{2}}(x) + \frac{a_2}{a_0} J_{\frac{5}{2}}(x) \right],$$

时，得到可用以确定 μ 的二阶方程

$$\begin{vmatrix} \mu P_{0,0} - 1 & \mu P_{0,2} \\ \mu P_{2,0} & \mu P_{2,2} - \frac{1}{5} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.33)$$

将行列式(2.33)展开，很容易找出两个根中较小的一个 ($P_{0,2} = P_{2,0}$)

$$\mu = \frac{\left(P_{2,2} + \frac{1}{5} P_{0,0} \right) - \sqrt{\left(P_{2,2} - \frac{1}{5} P_{0,0} \right)^2 + \frac{4}{5} P_{0,2}^2}}{2(P_{0,0} P_{2,2} - P_{0,2}^2)}. \quad (2.34)$$

当 $\mu = \mu_1$ ，最佳的信号形状具有

$$U_{\text{最佳}}(t) \approx \frac{a_0}{\sqrt{\omega_0 t}} \left[J_{\frac{1}{2}}(\omega_0 t) + \frac{5\mu_1 P_{0,2}}{1 - 5\mu_1 P_{2,2}} J_{\frac{5}{2}}(\omega_0 t) \right], \quad (2.35)$$

$$-\frac{\tau}{2} \leq t \leq +\frac{\tau}{2},$$

的形式，式中

a_0 ——任意常数。

包括在公式(2.34)与(2.35)中的系数，由一般的公式(2.28)——(2.30)中得到：

$$P_{0,0} = \frac{2}{\pi k} \text{Si}(2k) - J_{\frac{1}{2}}^2(k);$$

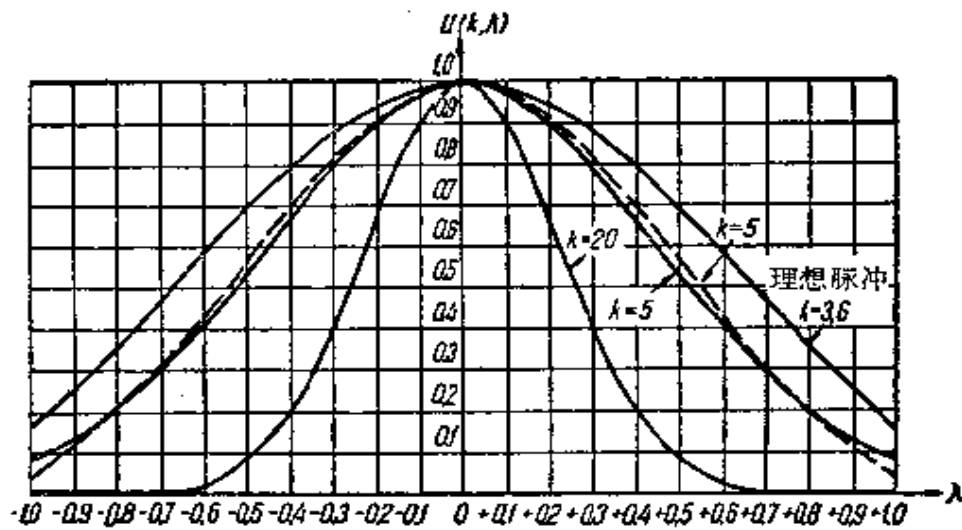


图 2.2 当 $k=3.6$; 5 与 20 时, 占最小频带的有限持续脉冲的形状; $k=3.6$ 与 $k=5$ (虚线) 的曲线, 系按公式 $U(k, \lambda) = \sum_{n=0}^k d_n(k) P_n(\lambda)$ 计算, $k=5$ (实线) 与 $k=20$ 的曲线系按近似公式 $U(k, \lambda) \approx e^{-\frac{k\lambda^2}{2}}$ 计算

$$P_{0,2} = \frac{k}{6} \left[J_{\frac{3}{2}}(k) J_{\frac{1}{2}}(k) - J_{\frac{5}{2}}(k) J_{-\frac{1}{2}}(k) \right] - \frac{1}{3} J_{\frac{5}{2}}(k) J_{\frac{1}{2}}(k); \quad (2.36)$$

$$P_{2,2} = \frac{2}{5} \left[\frac{1}{\pi} \text{Si}(2k) - J_{\frac{3}{2}}^2(k) - J_{\frac{5}{2}}^2(k) - \frac{1}{2} J_{\frac{7}{2}}^2(k) \right].$$

图 2.2 中表示出 (2.13) 式右边部分按二价近似数据所绘制的图形。

§ 2.5. 把积分方程化为微分方程的边值问题来求解

现在我们来变换积分方程 (2.12), 引入新变量 $t = \frac{\tau}{2}\lambda$ 与 $s = \frac{\tau}{2}\nu$, 则得到

$$U(\lambda) = \mu' \int \frac{\sin k(\lambda - \nu)}{\pi(\lambda - \nu)} U(\nu) d\nu, \quad (2.37)$$

式中

$$\mu' = \frac{\tau}{2}\mu.$$

在附录 II 中指出, 积分方程 (2.37) 的每一个解, 系刘刘微尔型齐次线性微分方程

$$D_{\lambda}U(\lambda) \equiv \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda^2 - 1) \frac{dU(\lambda)}{d\lambda} \right] + (k\lambda)^2 U(\lambda) = CU(\lambda) \quad (2.38)$$

的有界解。

积分方程 (2.37) 能很方便地化为微分方程 (2.38) 的边值问题, 这样, 在通过数值计算来确定最佳形状的信号 $U_{最佳}(\lambda)$ 与在频带中所包含的能量最大值 $\max W(\omega_0)$ 时, 我们就能够利用刊载在 [文献 9] 中并列成表格的系数 d_n 。

我们指出, 每一个相应于分隔常数 C 的最小特征值 C_0 的微分方程 (2.38) 的有界解 $u(k, \lambda)$, 即为积分方程 (2.37) 的解。当 $|\lambda| \leq 1$ 时, 函数 $u(k, \lambda)$ 可以表示为级数

$$u(k, \lambda) = \sum'_n d_n(k) P_n(\lambda) \quad (2.39)$$

的形式。

公式 (2.39) 中, 参数 k 可以取任意一个正值, (2.39) 中的系数 $d_n(k)$ 当 $k \leq 5$ 时已制成表格, 而函数 $P_n(\lambda)$ 为相应于 $n=0, 1, 2, 3, \dots$ 阶的勒让德多项式。Σ 上面的撇号表示仅从零按偶数的 n 来求和。

在附录 III 中表明如何来确定系数 $d_n(k)$ 。

另一方面, 作为微分方程 (2.38) 有界解的函数 $u(k, \lambda)$, 可以按球形贝塞尔函数对任意 λ 值展开为收敛级数

$$u(k, \lambda) = \rho(k) \frac{1}{\sum'_n d_n(k)} \sum'_n (-1)^{\frac{n}{2}} d_n(k) j_n(k\lambda). \quad (2.40)$$

公式 (2.40) 以及以后的 Σ 上的撇号的含义和 (2.39) 中相同, 而

$\rho(k)$ 为不依赖 λ 的比例系数。独立变量为 $k\lambda$ 的函数 j_n 为球形贝塞尔函数, 它由等式

$$j_n(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \equiv (-z)^n \left(\frac{d}{z dz} \right)^n \left(\frac{\sin z}{z} \right) \quad (2.41)$$

来确定, 并且满足关系式

$$j_n(z)_{z \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{z} \sin \left(z - \frac{n\pi}{2} \right); \quad (2.42)$$

$$j_n(z)_{z \rightarrow \infty} \approx \frac{2^n n!}{(2n+1)!} z^n = \frac{z^n}{1.3.5 \cdots (2n+1)}. \quad (2.43)$$

系数 $d_n(k)$ 具有与公式(2.39)中相同的数值。这点可以利用下面方法来验证: 如果类似于附录 III 中对等式(2.39)的系数推出关系式(II. III. 15)那样, 由等式(2.40)导出系数 $d_n(k)$ 的递推关系式, 则两个关系式具有完全相同的形式。

在(2.40)中假定 $\lambda=0$, 并考虑到关系式(2.43), 则可以求出 $\rho(k)$ 值为

$$\rho(k) = \frac{\sum' d_n(k)}{d_0(k)} u(k, 0). \quad (2.44)$$

现在来推导确定 $\max_{\omega_0} W(\omega_0) = \frac{1}{\mu}$ 的公式。在方程(2.39)中将自变量 λ 用 μ 来代替, 将所得到的等式两边同乘以 $e^{ik\lambda\mu}$, 再将它按 μ 在 -1 至 $+1$ 的范围内进行积分

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} u(k, \mu) e^{ik\lambda\mu} d\mu &= \int_{-1}^{+1} \sum' d_n(k) P_n(\mu) e^{ik\lambda\mu} d\mu = \\ &= \sum' d_n(k) \int_{-1}^{+1} e^{ik\lambda\mu} P_n(\mu) d\mu. \end{aligned} \quad (2.45)$$

显然[文献 36, 第 583 页], 我们有

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\lambda\mu} P_n(\mu) d\mu = 2j_n(z). \quad (2.46)$$

考虑到(2.40)与(2.46), 可以将等式(2.45)改写为下列形式:

$$\int_{-1}^{+1} u(k, \mu) e^{i k \lambda \mu} d\mu = \frac{2 \sum' d_n(k)}{\rho(k)} u(k, \lambda). \quad (2.47)$$

考虑到 $u(k, \mu)$ 为 μ 的偶函数, 将(2.44)中的 $\rho(k)$ 值代入方程(2.47)中, 则方程(2.47)可以写为下列形式:

$$\int_{-1}^{+1} \cos(k\lambda\mu) u(k, \mu) d\mu = 2 \frac{d_0(k)}{u(k, 0)} u(k, \lambda). \quad (2.48)$$

其次, 由 $u(k, \mu)$ 为偶的性质, 可知 $\sin(k\lambda\mu) \cdot u(k, \mu)$ 应为 μ 的奇函数, 从而

$$\int_{-1}^{+1} \sin(k\lambda\mu) u(k, \mu) d\mu = 0. \quad (2.49)$$

将等式(2.48)与(2.49)两边分别相加

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} u(k, \mu) [\cos(k\lambda\mu) + \sin(k\lambda\mu)] d\mu &= \\ &= \frac{2d_0(k)}{u(k, 0)} u(k, \lambda). \end{aligned} \quad (2.50)$$

将(2.50)中的自变量 λ 用 μ 代替, 而 μ 用 ν 代替, 得出

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} u(k, \nu) [\cos(k\mu\nu) + \sin(k\mu\nu)] d\nu &= \\ &= \frac{2d_0(k)}{u(k, 0)} u(k, \mu). \end{aligned} \quad (2.51)$$

将(2.51)的两边乘以

$$[\cos(k\lambda\mu) + \sin(k\lambda\mu)]$$

并在 -1 至 $+1$ 的范围内按 μ 进行积分:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \left\{ [\cos(k\lambda\mu) + \sin(k\lambda\mu)] \int_{-1}^{+1} u(k, \nu) [\cos(k\mu\nu) + \right. \\ \left. + \sin(k\mu\nu)] d\nu \right\} d\mu &= \\ &= \frac{2d_0(k)}{u(k, 0)} \int_{-1}^{+1} u(k, \mu) [\cos(k\lambda\mu) + \sin(k\lambda\mu)] d\mu. \end{aligned} \quad (2.52)$$

现在来将(2.52)的左右两边加以变换。

左边 变更积分次序

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left\{ [\cos(k\lambda\mu) + \sin(k\lambda\mu)] \int_{-1}^{+1} u(k, \nu) [\cos(k\mu\nu) + \right. \\ & \quad \left. + \sin(k\mu\nu)] d\nu \right\} d\mu = \\ & = \int_{-1}^{+1} \left\{ u(k, \nu) \int_{-1}^{+1} [\cos(k\lambda\mu) + \sin(k\lambda\mu)] [\cos(k\mu\nu) + \right. \\ & \quad \left. + \sin(k\mu\nu)] d\mu \right\} d\nu; \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} [\cos(k\lambda\mu) + \sin(k\lambda\mu)] [\cos(k\mu\nu) + \sin(k\mu\nu)] d\mu = \\ & \quad = \frac{2 \sin k(\lambda - \nu)}{k(\lambda - \nu)}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

因此，等式(2.52)的左边部分可以写为

$$\int_{-1}^{+1} u(k, \nu) \frac{2 \sin k(\lambda - \nu)}{k(\lambda - \nu)} d\nu = \frac{2\pi}{k} \int_{-1}^{+1} u(\nu) \frac{\sin k(\lambda - \nu)}{\pi(\lambda - \nu)} d\nu. \quad (2.54)$$

右边考虑到等式(2.51)，我們写出

$$\begin{aligned} & \frac{2 d_0(k)}{u(k, 0)} \int_{-1}^{+1} u(k, \mu) [\cos(k\lambda\mu) + \sin(k\lambda\mu)] d\mu = \\ & \quad = \left[\frac{2 d_0(k)}{u(k, 0)} \right]^2 u(k, \lambda). \end{aligned} \quad (2.55)$$

令(2.54)与(2.55)的右边部分相等，得出

$$\frac{2\pi}{k} \int_{-1}^{+1} u(\nu) \frac{\sin k(\lambda - \nu)}{\pi(\lambda - \nu)} d\nu = \left[\frac{2 d_0(k)}{u(k, 0)} \right]^2 u(k, \lambda),$$

由此

$$u(\lambda) = \frac{\pi u^2(k, 0)}{2 k d_0^2(k)} \int_{-1}^{+1} u(\nu) \frac{\sin k(\lambda - \nu)}{\pi(\lambda - \nu)} d\nu. \quad (2.56)$$

于是，我們证明了：相应于分隔常数 C 中最小特征值 C_0 的微分方程(2.38)的解 $u(\lambda)$ ，即为积分方程(2.37)的解。

$$u' = \frac{\pi u^2(k, 0)}{2 k d_0^2(k)}.$$

或者相应于[文献 9]中所采用的归一化

$$u(k, 0) = P_0(0) = 1, \quad (2.57)$$

则有

$$\mu' = \frac{\pi}{2kd_0^2}. \quad (2.58)$$

根据方程式(2.13)与(2.58)所确定的频带中的最大能量为

$$\max W(k) = \frac{1}{\mu'} = \frac{2kd_0^2}{\pi}. \quad (2.59)$$

类似地可以证明, 微分方程(2.38)的每一个有界解(在分隔常数 C 的任意特征值 C_m 时), 即为积分方程(2.37)的解。

在附录 II 中证明, 核 $\frac{\sin k(\lambda - \nu)}{\pi(\lambda - \nu)}$ 的每一个特征函数, 即为微分方程(2.38)相应于分隔常数 C 中某一个值 C_m 的有界解。

因此, 积分方程(2.37)解的集合, 与微分方程(2.38)有界解的集合是一致的。

按公式(2.59)所进行的计算表明, 当 $k=3.6$ 时, 包含在给定频带中的能量部分达到 99% (更精确一点说, 为 99.15%)。于是, “理想”脉冲所占用的频带宽度为

$$\Delta f \approx \frac{2}{\pi\pi} \cdot 3.6 = \frac{7.2}{\pi\pi} \text{ (赫)}. \quad (2.60)$$

在图 2.2 中表示出当 $k=3.6$ 时, 按公式(2.39)所计算出来的 $u_{\text{最佳}}(\lambda)$ 的图形。

在图 2.3 中绘制出 k 等于 0~5 时的函数 $u(k, \lambda)$ 的图形, 并列 出对应的表格。

现在来阐明, 为了得到“理想的”脉冲, 前面提过的脉冲“有效持续时间”与“有效频谱宽度”之间应当有什么关系。

根据定义

$$\Delta t = [2\pi(\bar{u} - \underline{u})^2]^{-\frac{1}{2}} \text{——脉冲的“有效持续时间”};$$

$$\Delta f = [2\pi(\bar{f} - \underline{f})^2]^{-\frac{1}{2}} \text{——“有效频谱宽度”,}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \overline{(u-\bar{u})^2} &= \bar{u}^2 - (\bar{u})^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} uu^* \lambda^2 d\lambda}{\int_{-\infty}^{+\infty} uu^* d\lambda} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} uu^* \lambda d\lambda}{\int_{-\infty}^{+\infty} uu^* d\lambda} \right)^2; \\ \overline{(f-\bar{f})^2} &= \bar{f}^2 - (\bar{f})^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} ff^* \omega^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} ff^* d\omega} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} ff^* \omega d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} ff^* d\omega} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

现在来确定“理想”脉冲的“有效持续时间”。根据公式(2.39)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} uu^* d\lambda = \int_{-1}^{+1} u^2 d\lambda = \sum_n' \frac{2}{2n+1} d_n^2. \quad (2.62)$$

根据公式(П. III. 4), 得出

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} uu^* \lambda d\lambda = \int_{-1}^{+1} u^2 \lambda d\lambda = \\ &= \int_{-1}^{+1} \sum_n' d_n P_n(\lambda) \sum_n' d_n \left[\frac{n}{2n+1} P_{n-1}(\lambda) + \frac{n+1}{2n-1} P_{n+1}(\lambda) \right] d\lambda \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} uu^* \lambda^2 d\lambda = \int_{-1}^{+1} (u\lambda)^2 d\lambda = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_n' d_n P_n(\lambda) \lambda \right]^2 d\lambda = \\ &= \int_{-1}^{+1} \left\{ \sum_n' d_n \left[\frac{n}{2n+1} P_{n-1}(\lambda) + \frac{n+1}{2n-1} P_{n+1}(\lambda) \right] \right\}^2 d\lambda. \end{aligned} \quad (2.64)$$

考虑到

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(\lambda) d\lambda = \frac{2}{2n+1},$$

将(2.64)积分以后, 得到

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (u\lambda)^2 d\lambda &= \sum_n' \left\{ d_n d_{n-2} \frac{n}{2n+1} \frac{n-1}{2n-3} \frac{2}{2n-1} + \right. \\ & \left. + d_n^2 \left[\frac{n^2}{(2n+1)^2} \frac{2}{2n-1} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2} \frac{2}{2n+3} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ d_n d_{n+2} \left\{ \frac{n+1}{2n+1} \frac{n+2}{2n+5} \frac{2}{2n+3} \right\}. \quad (2.65)$$

或者，考虑到(2.65)式大括弧中的第一项实际上和第三项相等，得出

$$\int_{-1}^{+1} (u\lambda)^2 d\lambda = \sum_n' \left\{ \frac{2d_n^2}{(2n+1)^2} \left[\frac{n^2}{2n-1} + \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right] + 4d_n d_{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \right\}. \quad (2.66)$$

令

$$\bar{t}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} uu^* \lambda^2 d\lambda}{\int_{-\infty}^{+\infty} uu^* d\lambda},$$

根据(2.62)与(2.66)，得出

$$\bar{t}^2 = \frac{\sum_n' \left\{ \frac{2d_n^2}{(2n+1)^2} \left[\frac{n^2}{2n-1} + \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right] + 4d_n d_{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \right\}}{\sum_n' \frac{2}{2n+1} d_n^2}, \quad (2.67)$$

与

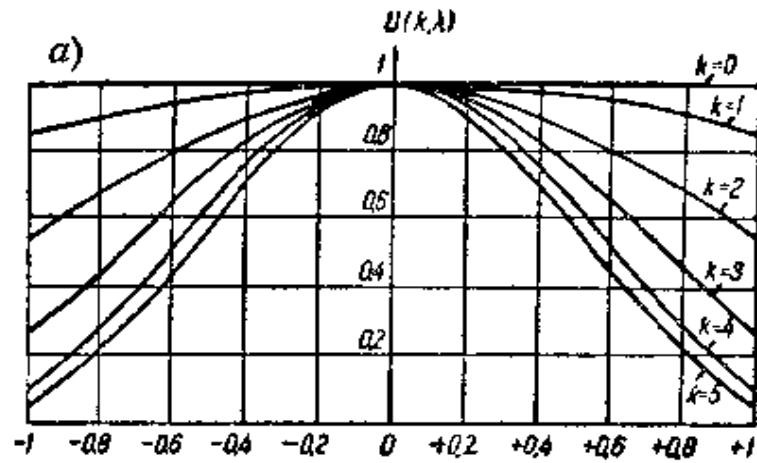
$$\Delta t = \sqrt{2\pi\bar{t}^2}.$$

其次，我們应当来确定“理想”脉冲的“有效频带宽度”。然而，这样做是不可能的，因为“理想”脉冲在边缘处有间断，而具有间断的函数的频谱，将如同在第五章中要说明的那样，是随着频率的增加而按 $\frac{1}{\omega}$ 的比例减低，也就是说，我們应当确定以

$$f(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\omega}$$

表示的脉冲的“有效频谱宽度”，并且

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) \neq 0.$$



b)

λ	当 k 为下列值时的 $u(k, \lambda)$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
0	1	1	1	1	1
0.1	0.9985	0.9945	0.9893	0.9842	0.9786
0.2	0.994	0.978	0.958	0.937	0.919
0.25	0.990	0.965	0.934	0.905	0.876
0.3	0.986	0.950	0.907	0.865	0.826
0.4	0.975	0.912	0.839	0.770	0.707
0.5	0.961	0.865	0.957	0.659	0.574
0.6	0.944	0.810	0.664	0.540	0.439
0.7	0.924	0.748	0.565	0.420	0.312
0.75	0.913	0.714	0.514	0.362	0.255
0.8	0.901	0.679	0.463	0.307	0.203
0.9	0.876	0.607	0.363	0.205	0.115
0.95	0.862	0.569	0.314	0.160	0.080
1	0.8481	0.5315	0.2675	0.1193	0.0502

图 2.3 a) 当 $k=0-5$ 时, 在给定频带中包含有最大能量部分的信号 $u(k, \lambda)$ 的形状;b) 函数 $u(k, \lambda) = \sum_n d_n(k) P_n(\lambda)$ 的值

或 $\varphi(\omega)$ 为周期函数。

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f f^* \omega^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(\omega) d\omega. \quad (2.68)$$

由于(2.68)中的被积函数永远是正的,且当 $\omega \rightarrow \infty$ 时并不趋于零,故积分(2.68)系发散的,而不可能确定出“有效频谱宽度”。这就再一次证实了“有效频谱宽度”的概念是不方便的。

§ 2.6. 参数 k 值较大时对信号 $u(k, \lambda)$ 的研究

在方程(2.38)中作变量置换

$$\lambda \sqrt{k} = x;$$

则

$$U(\lambda) = U\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) = V(x), \quad (2.69)$$

而方程(2.38)具有

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{x^2}{k} - 1 \right) \frac{dV(x)}{dx} \right] + x^2 V(x) = \frac{C}{k} V(x), \quad (2.70)$$

的形式。

当 $k \rightarrow \infty$, (2.70)变为

$$-\frac{d^2 V(x)}{dx^2} + x^2 V(x) = B_0 V(x). \quad (2.71)$$

形式的方程。式中

$$B_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_0(k)}{k}, \quad (2.72)$$

而 C_0 表示分隔常数 C 的最小特征值。

方程(2.71)的解为函数

$$V_0(x) = \gamma_0 e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (2.73)$$

此解对应于

$$B_0 = 1. \quad (2.74)$$

如果將(2.73)代入(2.71)中并進行校驗，就可以証實上述論斷。

由(2.72)与(2.74)，得出

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_0(k)}{k} = 1,$$

亦即当 $k \rightarrow \infty$ 时， $C_0(k) \sim k$ 。

如果选定归一化的(2.57)，則

$$u(k, \lambda)_{k \rightarrow \infty} \sim V_0(k, k) = e^{-\frac{k\lambda^2}{2}}. \quad (2.75)$$

数值計算表明，限制在時間區間 $-\frac{\tau}{2} \leq t \leq +\frac{\tau}{2}$ 中的信号 $u_{最佳}(t)$ ，在 $k \geq 5$ 时，可以足够好地用近似公式(2.75)表示出来，它相应于包含有不少于頻譜全部能量 99.94% 的頻帶。

于是，我們得出結論：根据公式(2.75)，“理想”脈沖在區段 $-1 \leq \lambda \leq +1$ 上，及在給定頻帶中包含的能量不低于頻譜全部能量的 99.94% 的条件下，可以用高斯分布型的曲綫表示。

第三章 傳輸脈沖占用的頻帶

本章討論各种不同形状脈沖在頻帶中的能量分布，并确定出傳輸这种脈沖所占用頻帶寬度的数值。給出了矩形、梯形、三角形、余弦形、余弦-平方形与余弦-立方形脈沖頻帶中能量分布函数的公式，并繪出了图形。

詳細地研究了低頻与高頻的余弦形脈沖。特別是討論了脈沖的起始相位对脈沖傳輸所占用頻帶寬度的影响問題。給出了具有不同起始相位的余弦形脈沖在傳輸时所占用的頻帶寬度与組成此脈沖的余弦周期數目間的关系图形。

用計算的結果从脉冲的占用頻带来評断各种不同形状的脉冲。文中指出，由余弦半周期所构成的脉冲，占有最狭窄的頻带，且接近于“理想”的脉冲。

§ 3.1. 頻带中脉冲能量的分布

設給定持續時間为 τ 的脉冲 $U(t)$ 。脉冲 $U(t)$ 的頻譜 $f(i\omega)$ 用傅里叶积分計算得：

$$f(i\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.1)$$

式中当 $|t| > \frac{\tau}{2}$ 时， $U(t) = 0$ 。

脉冲能量的頻譜密度将等于

$$ff^* = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U(t_1) U(t_2) \cdot e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2. \quad (3.2)$$

在頻带 $-\omega$, $+\omega$ 中的部分能量用公式

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\omega}^{\omega} ff^* d\omega \leq W_{\text{最大}} = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} ff^* d\omega. \quad (3.3)$$

来表示。

为了方便起見，引入如下形式的頻带中的能量分布函数：

$$\eta = \frac{W(\omega)}{W_{\text{最大}}}. \quad (3.4)$$

关于函数 η ，应当作以下說明：

1. 它为单調递增函数，亦即当 ω 增加时，它繼續不断地增长，或者至少保持着常值。
2. 两个任意 ω 值間的函数 η ，与包含在此頻率范围内的函数 $U(t)$ 的能量成比例。
3. 函数 η 的最大值等于 1。

下面我們来研究各种不同形状的脉冲在頻带中的能量分布，并确定这些脉冲在传输时所占用頻带的宽度。

§ 3.2. 矩形脉冲

时间函数用式

$$U(t) = \begin{cases} A & \text{当 } -\frac{\tau}{2} < t < +\frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{当 } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}, \quad (3.5)$$

来表示。

脉冲能量的频谱密度等于

$$ff^* = \left(\frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \right)^2, \quad (3.6)$$

式中

ω ——频带宽度；

τ ——脉冲的持续时间。

频带中相对的部分能量用公式

$$\eta = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(\omega\tau) - \frac{2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}}{\omega\tau} \right], \quad (3.7)$$

来表示，或者，引入单一的参数

$$k = \frac{\omega\tau}{2}, \quad (3.8)$$

此参数为脉冲持续时间与频带宽度相乘积的一半。由此得出

$$\eta = \frac{2}{\pi} \text{Si}(2k) - J_{\frac{1}{2}}^2(k), \quad (3.9)$$

式中

$J_{\frac{1}{2}}(k) = \left(\frac{2}{\pi k} \right)^{\frac{1}{2}} \sin k$ ——指标为 $\frac{1}{2}$ 的第一类贝塞尔函数。

从图 3.1 可以看出，在有限持续的单一信号的频谱中央部分（当 k 值小时），不可能集中有比矩形脉冲能量更多的能量。然而，

当 k 增大时, 矩形脉冲能量增长得要比理想脉冲能量慢得多。

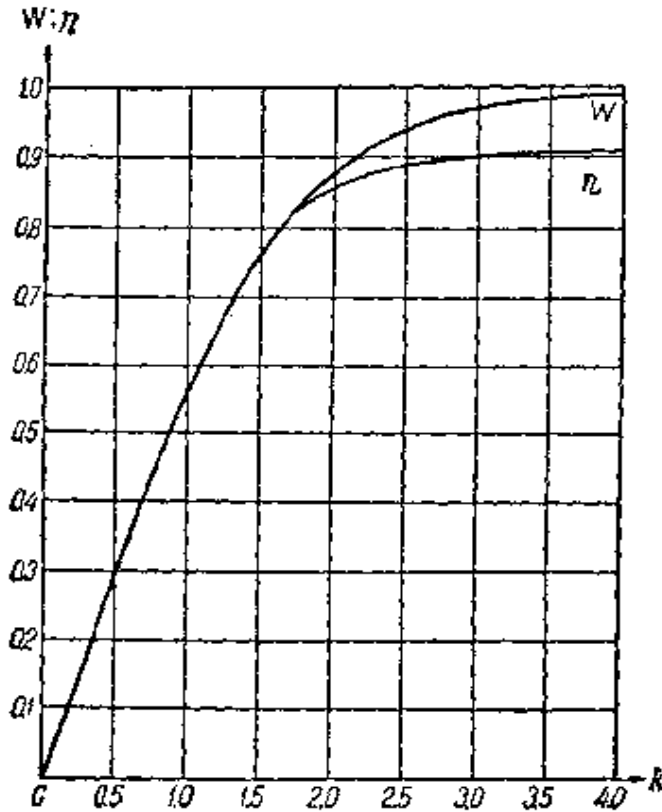


图 3.1 “理想”脉冲的能量(W)与矩形脉冲的能量(η)在频带中的分布
传输矩形脉冲所占用的频带宽度(以 k 为单位)等于:

$$\Delta f \approx 32.2.$$

§ 3.3. 梯形脉冲与三角形脉冲

梯形脉冲的时间函数的表示式为

$$U(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2A}{\tau - \tau_1} \left(\frac{\tau}{2} + t \right) & \text{当 } -\frac{\tau}{2} < t < -\frac{\tau_1}{2} \\ A & \text{当 } -\frac{\tau_1}{2} < t < \frac{\tau_1}{2} \\ \frac{2A}{\tau - \tau_1} \left(\frac{\tau}{2} - t \right) & \text{当 } \frac{\tau_1}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{当 } |t| > \frac{\tau}{2} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

能量的频谱密度等于

$$ff^* = \left(\frac{8A}{(\tau - \tau_1)\omega^2} \sin \frac{\omega(\tau + \tau_1)}{4} \sin \frac{\omega(\tau - \tau_1)}{4} \right)^2, \quad (3.11)$$

而频带中相对的部分能量的表示式为

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{1}{\pi(1-\xi)^2(1+2\xi)} \left\{ -\frac{\cos 2k}{k^3} + \frac{\sin 2k}{k^2} + \right. \\ & + \frac{2\cos 2k}{k} + 4\text{Si } 2k + \xi^3 \left[-\frac{\cos 2\xi k}{\xi^3 k^3} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sin 2\xi k}{\xi^2 k^2} + \frac{2\cos 2\xi k}{\xi k} + 4\text{Si } 2\xi k \right] - \right. \\ & - (1+\xi)^3 \left[-\frac{2\cos(1+\xi)k}{(1+\xi)^3 k^3} + \frac{\sin(1+\xi)k}{(1+\xi)^2 k^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos(1+\xi)k}{(1+\xi)k} + \text{Si}(1+\xi)k \right] - (1-\xi)^3 \left[-\frac{2\cos(1-\xi)k}{(1-\xi)^3 k^3} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin(1-\xi)k}{(1-\xi)^2 k^2} - \frac{\cos(1-\xi)k}{(1-\xi)k} - \text{Si}(1-\xi)k \right] - \frac{2}{k^3} \left. \right\}, \quad (3.12) \end{aligned}$$

式中 $\xi = \frac{\tau_1}{\tau}$, $k = \frac{\omega\tau}{2}$, τ, τ_1 表示在图 3.2 中

设 $\xi = 0$, 则得出确定三角形脉冲相对的部分能量的公式:

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos 2k - 4\cos k + 3}{k^3} + \frac{\sin 2k - 2\sin k}{k^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2(\cos 2k - \cos k)}{k} + 2(2\text{Si}2k - \text{Si}k) \right]. \quad (3.13) \end{aligned}$$

现在来研究一下矩形脉冲, 当减低 τ_1 时, 矩形脉冲的边沿将发生倾斜。此时, 矩形将逐渐地变为梯形, 而后, 在极限情况下变为三角形。这时频带中的能量分布将如何变化呢? 回答此问题关系到频带多宽的问题。由图 3.2 中的图形可以看出, 当 k 约小于 2 时, 脉冲边沿斜度的加大减低了集中在给定频带中的能量百分数。当 k 值约大于 3.5 时, 脉冲边沿斜度的加大则增加了集中在给定频带中的能量百分数。最后, 存在着值 $k \approx 2.0 \sim 3.5$ 的区域, 在这个区域中, 能量的集中与脉冲边沿斜度不发生多大的关系。

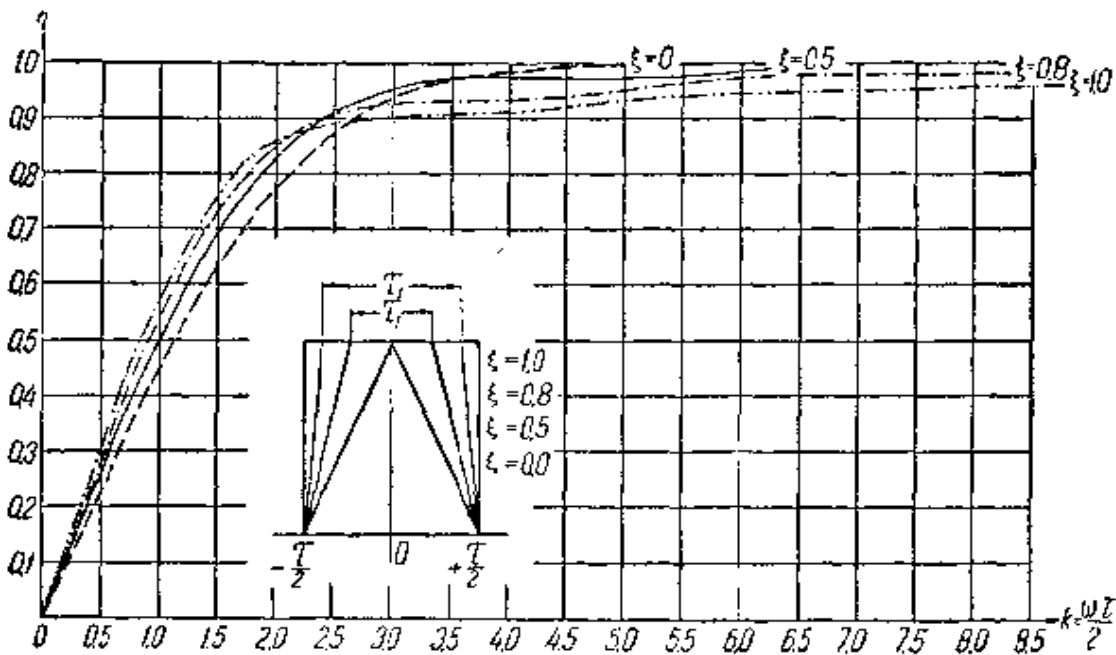


图 3.2 矩形脉冲、梯形脉冲与三角形脉冲在频带中的能量分布

传输梯形脉冲与三角形脉冲所占用的频带宽度将等于：

ξ	0.0	0.5	0.8
Δf (以 k 为单位)	4.1	6.2	10.2

因此，当脉冲边沿的斜度加大时，传输所占用的频带（亦即包含有 99% 的脉冲能量的频带）宽度减低。

§ 3.4. 形状为余弦曲线一段的脉冲。余弦形脉冲

在某一个区间 t_1, t_2 上与函数 $\cos \omega_0 t$ 相同，而在此区间以外处处为零的函数 $U(t)$ ，称之为具有一段余弦曲线形状的脉冲。

频谱的模由表示式

$$S(\omega) = \sqrt{[M(\omega)]^2 + [N(\omega)]^2}, \quad (3.14)$$

给出。式中除 $\omega = \omega_0$ 以外的所有 ω 值有：

$$M(\omega) = \frac{1}{2A_1} (\sin A_1 t_2 - \sin A_1 t_1) + \frac{1}{2B_1} (\sin B_1 t_2 - \sin B_1 t_1), \quad (3.15)$$

$$N(\omega) = -\frac{1}{2A_1}(\cos A_1 t_2 - \cos A_1 t_1) - \frac{1}{2B_1}(\cos B_1 t_2 - \cos B_1 t_1), \quad (3.16)$$

$$A_1 = \omega + \omega_0; \quad B_1 = \omega - \omega_0. \quad (3.17)$$

当 $\omega = \omega_0$ 时

$$M(\omega_0) = \frac{t_2 - t_1}{2} + \frac{1}{4\omega_0}(\sin 2\omega_0 t_2 - \sin 2\omega_0 t_1), \quad (3.18)$$

$$N(\omega_0) = -\frac{1}{4\omega_0}(\cos 2\omega_0 t_2 - \cos 2\omega_0 t_1). \quad (3.19)$$

在角频率由 0 至 ω 的频带中所包含的能量可以由公式

$$\begin{aligned} \int_0^\omega [S(\omega)]^2 d\omega = & -\frac{\sin^2 \frac{B_1 t_0}{2}}{B_1} - \frac{\sin^2 \frac{A_1 t_0}{2}}{A_1} + \\ & + \frac{t_0}{2} \left[\text{Si} A_1 t_0 - \text{Si} (\mp B_1 t_0) \right] - \frac{\cos \omega_0 (t_2 + t_1)}{2\omega_0} \left\{ \cos \omega_0 t_0 \times \right. \\ & \times \left[\ln \left(\mp \frac{A_1}{B_1} \right) + \text{Ci} B_1 t_0 - \text{Ci} A_1 t_0 \right] - \sin \omega_0 t_0 [\text{Si} (\mp B_1 t_0) - \\ & \left. - \text{Si} A_1 t_0] \right\}, \quad (3.20) \end{aligned}$$

来确定，式中 $t_0 = t_2 - t_1$ ，靠上面的符号相应于 $\omega < \omega_0$ ，靠下面的符号相应于 $\omega > \omega_0$ 。

如果在脉冲中包含有频率为 ω_0 的整数个半周期，且它从余弦的最小值开始，亦即 $t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0}$ ，则

$$\begin{aligned} K \% = 100 \cdot \eta = \frac{100}{\pi} & \left\{ \frac{\sin^2 \frac{(1-\alpha)\beta}{2}}{(1-\alpha)\beta} - \frac{\sin^2 \frac{(1+\alpha)\beta}{2}}{(1+\alpha)\beta} + \right. \\ & \left. + \text{Si}(1+\alpha)\beta - \text{Si}[\pm(1-\alpha)\beta] + \frac{1}{\beta} \left[\ln \pm \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \text{Gi}(1-\alpha)\beta - \text{Gi}(1+\alpha)\beta \end{aligned} \right\}, \quad (3.21)$$

式中 $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\beta = 2\pi\nu = \omega_0 t_0$, ν ——脉冲中所包含的频率为 ω_0 的周期数。方程 (3.21) 中某些项之前有不同符号, 其意义和方程 (3.20) 相同。

如果脉冲从余弦的最大值($t_1=0$)开始, 则在方程 (3.21) 中项 $\frac{1}{\beta}[\dots]$ 之前, 要用负号来代替正号。

分别用 ω_1 与 ω_2 来表示传输所占用频带的下界和上界。那末, 具有一段余弦曲线形状的脉冲在传输时所占用的频带宽度, 可以根据公式

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi}(\omega_2 - \omega_1) = \frac{\omega_0}{2\pi}(a_2 - a_1), \quad (3.22)$$

求出。

频带的边频率 ω_1 与 ω_2 可用方程 (3.21) 计算, 在该方程中的左边部分假定分别等于 0.005 与 0.995 (这是因为在传输所占用频带两边的带外传输的功率, 是取为彼此相等的)。

图 3.3 所示是具有相同的持续时间($\nu=2$)、但起始相位不同的两个脉冲的例子。这些脉冲的频谱按公式 (3.14)——(3.19) 进行计算。由图中可以看出, 变更起始相位使频谱“歪斜”, 如果脉冲从余弦曲线的零值开始, 那末, 位于频谱中央部分右侧的旁瓣, 高于位于中央部分左侧的旁瓣; 如果脉冲从余弦曲线的最大值开始, 那末与上相反, 左旁瓣要高于右旁瓣。

图 3.4—3.6 上, 表示出各种不同持续时间的脉冲(其中包含有整数个频率为 ω_0 的周期) 的函数 $K\% = f(\alpha)$ 的图形。在图 3.4 与 3.5 中也表示出相应脉冲的频谱密度曲线。由这些图形可以看出, 当脉冲的长度增加时, $K\% = f(\alpha)$ 曲线的形状接近于阶梯形。

图 3.7 与 3.8 上, 相应地表示确定传输不同持续时间的脉冲所

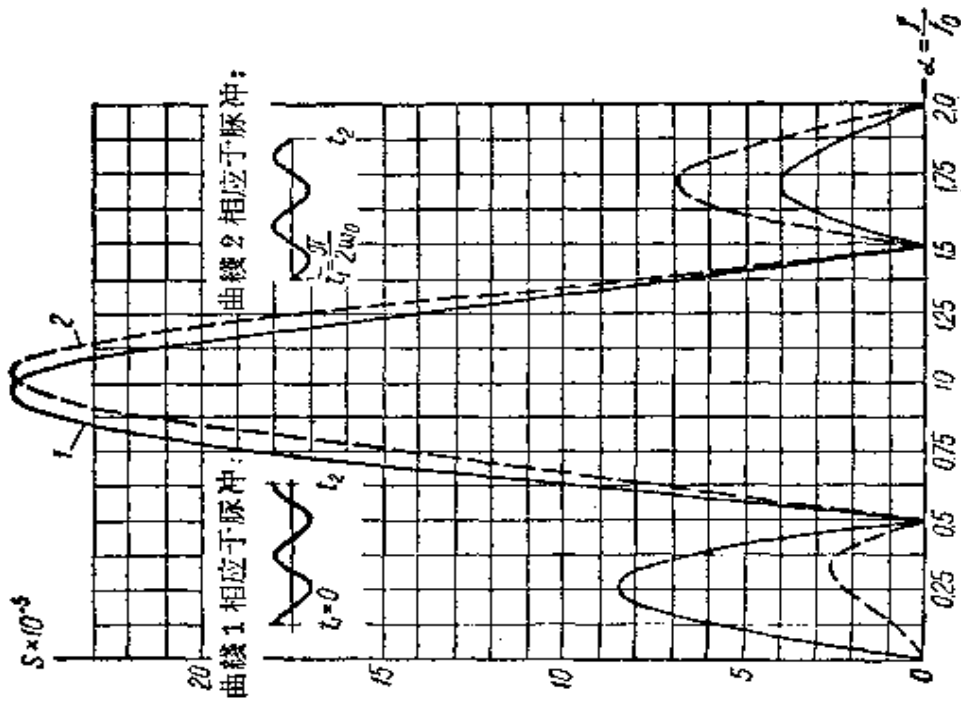


图 3.3 持续时间相同, 起始相位不同, 而形状为一段余弦曲线的脉冲的比较

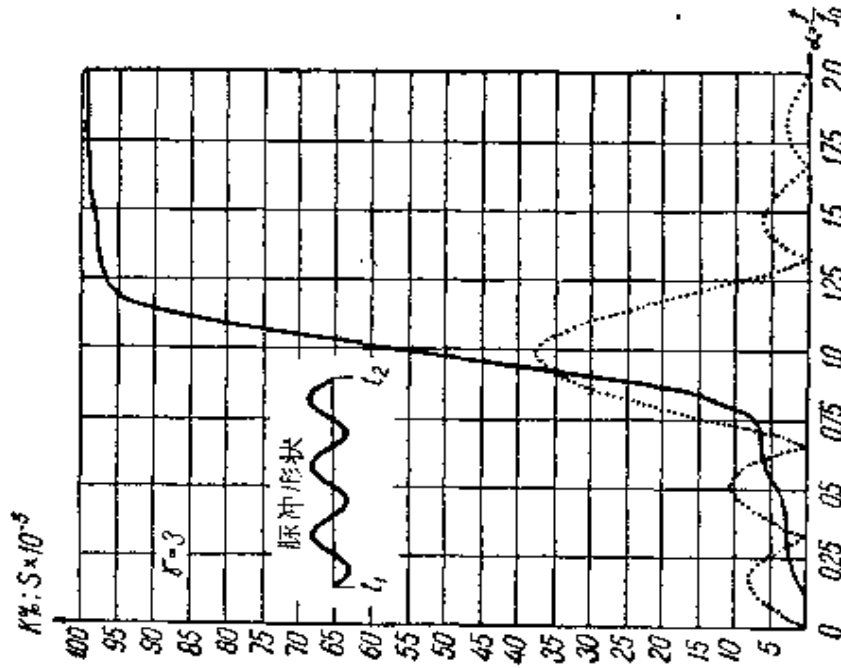


图 3.4 形状为一段余弦曲线的脉冲的频谱和它所包含的能量。实线表示能量, 点线表示频谱密度

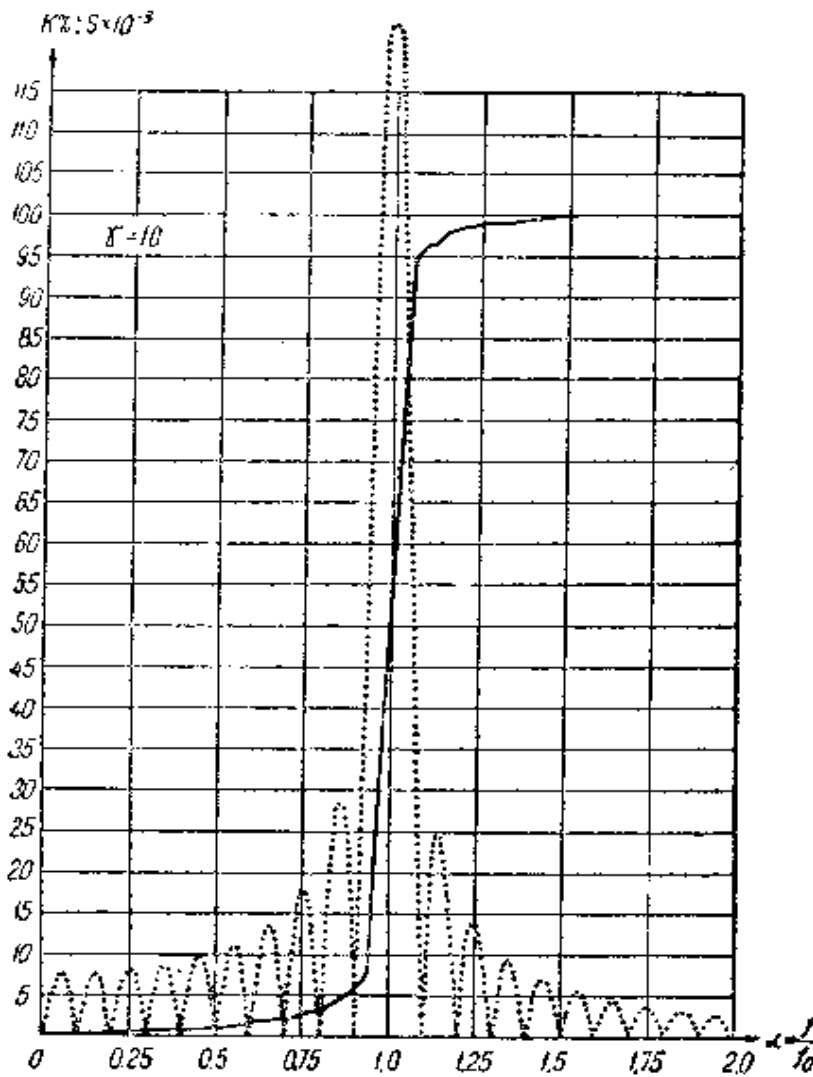


图 3.5 形状为一段余弦曲线的脉冲的频谱和它所包含的能量。实线表示能量，点线表示频谱密度

占用频带的下界与上界的图形。这些图形是根据公式(3.21)进行计算的，它适用于从余弦曲线零值 $(t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0})$ 开始的脉冲。

图 3.9 上绘出的传输所占用频带宽度的图形，相应于前面两个图形的差值 $\alpha_2 - \alpha_1$ 。这里为了比较起见，也将从余弦曲线最大值开始 $(t_1 = 0)$ 的脉冲在传输时的频带宽度图形绘出。图 3.9 中两条曲线的比较表明，在短脉冲（小的 ν 值）时，起始相位的数值对传输所占用频带宽度有很大的影响。当脉冲的长度增加时，起始相位对

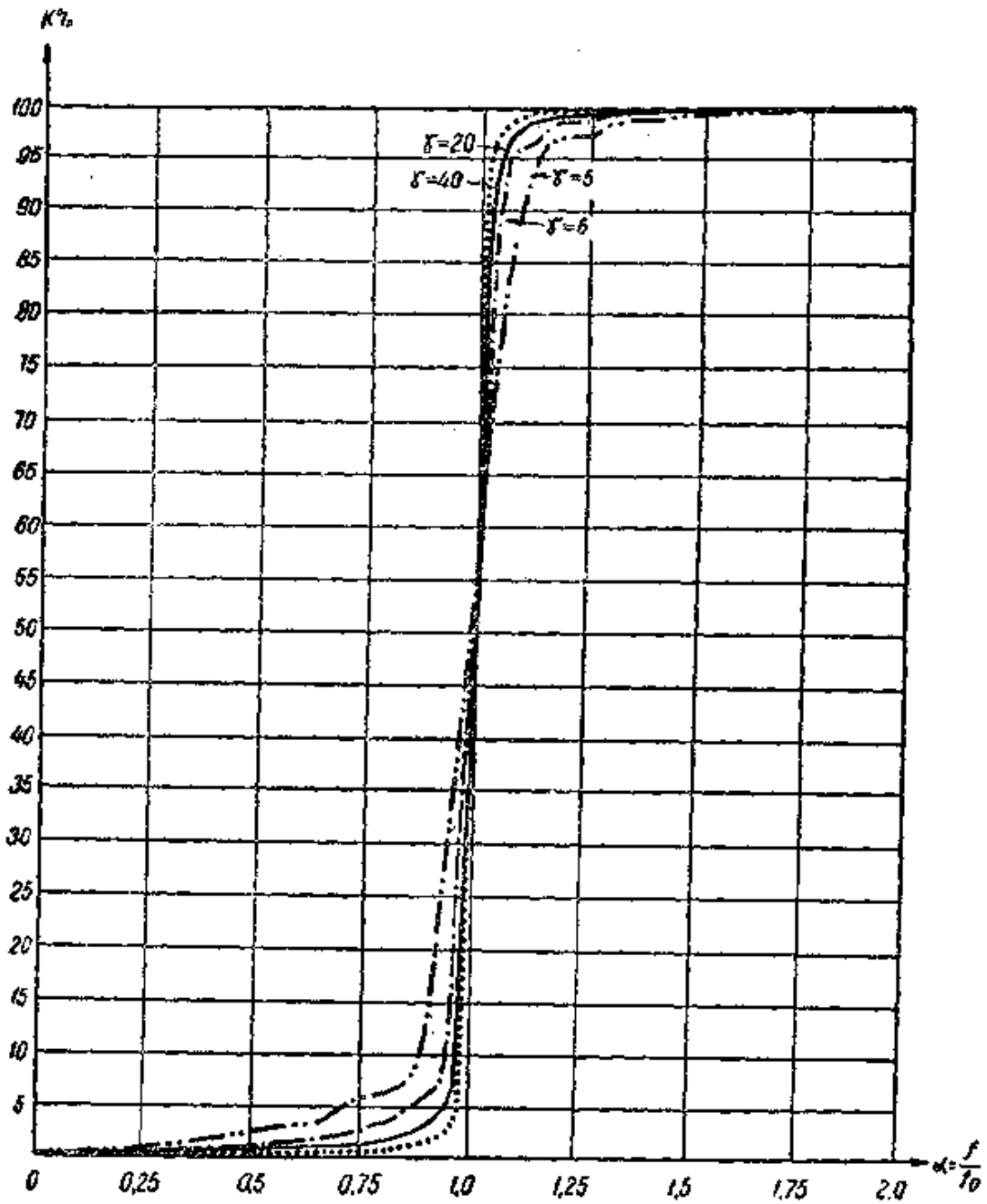


图 3.6 持续时间不同，而形状为一段余弦曲线的脉冲的能量在频带中的分布

频带宽度的影响较小，从图中可看出，这时两条曲线彼此靠近起来。

当 $\nu = \frac{1}{2}$ 时，我们得到特殊的情形，此时脉冲具有余弦半波的形状。这种形状的脉冲称为余弦形脉冲。它的时间函数可以用式

$$U(t) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi t}{\tau} & \text{当 } -\frac{\tau}{2} < t < +\frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{当 } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}, \quad (3.23)$$

来表示。

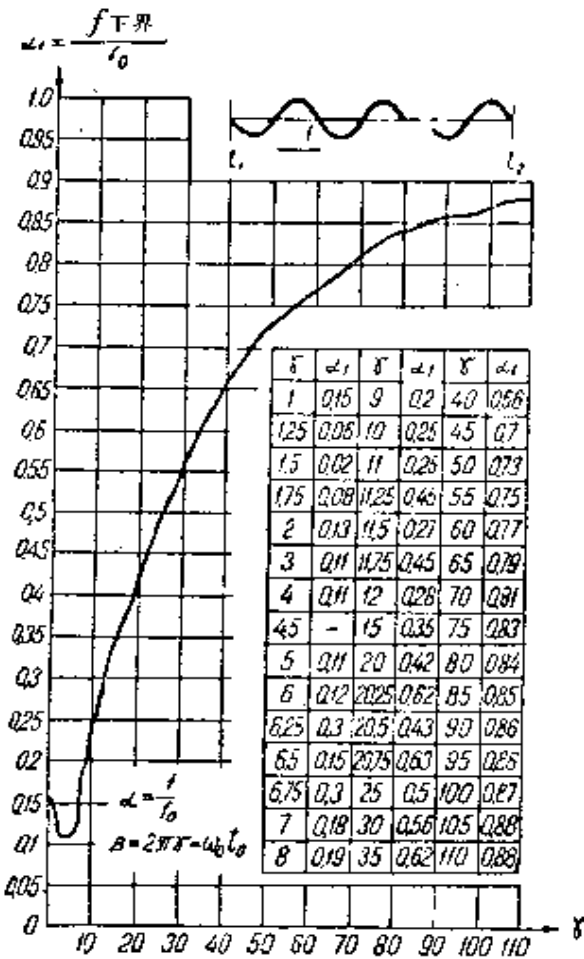


图 3.7 持续时间不同、形状为一段余弦曲线的脉冲，辐射时所占用的频带下界

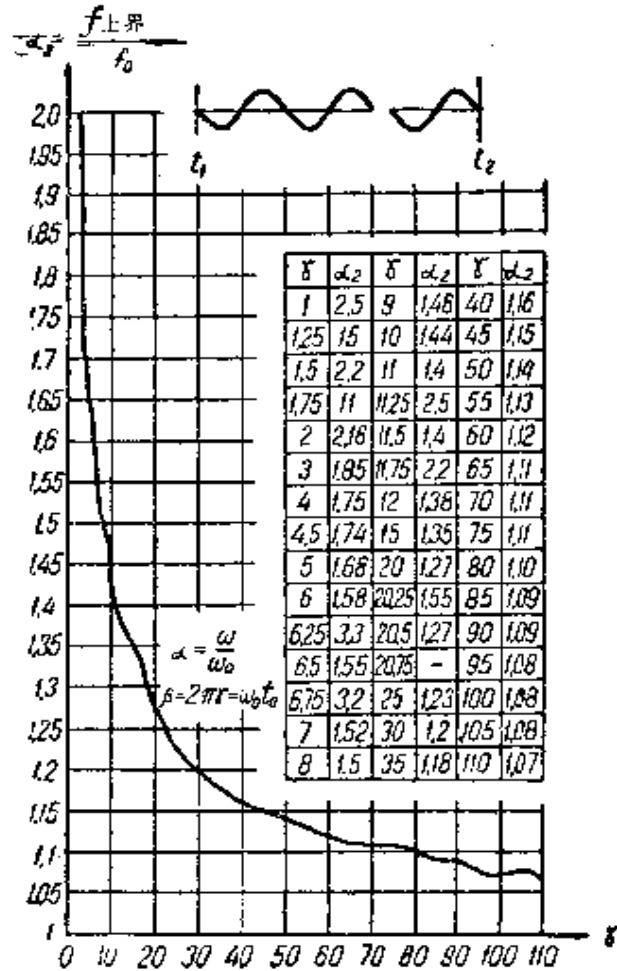


图 3.8 持续时间不同，形状为一段余弦曲线的脉冲，辐射时所占用的频带上界

能量的频谱密度等于

$$ff^* = \left\{ \frac{A\tau}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi + \omega\tau}{2}\right)}{\frac{\pi + \omega\tau}{2}} + \frac{\sin\left(\frac{\pi - \omega\tau}{2}\right)}{\frac{\pi - \omega\tau}{2}} \right] \right\}^2, \quad (3.24)$$

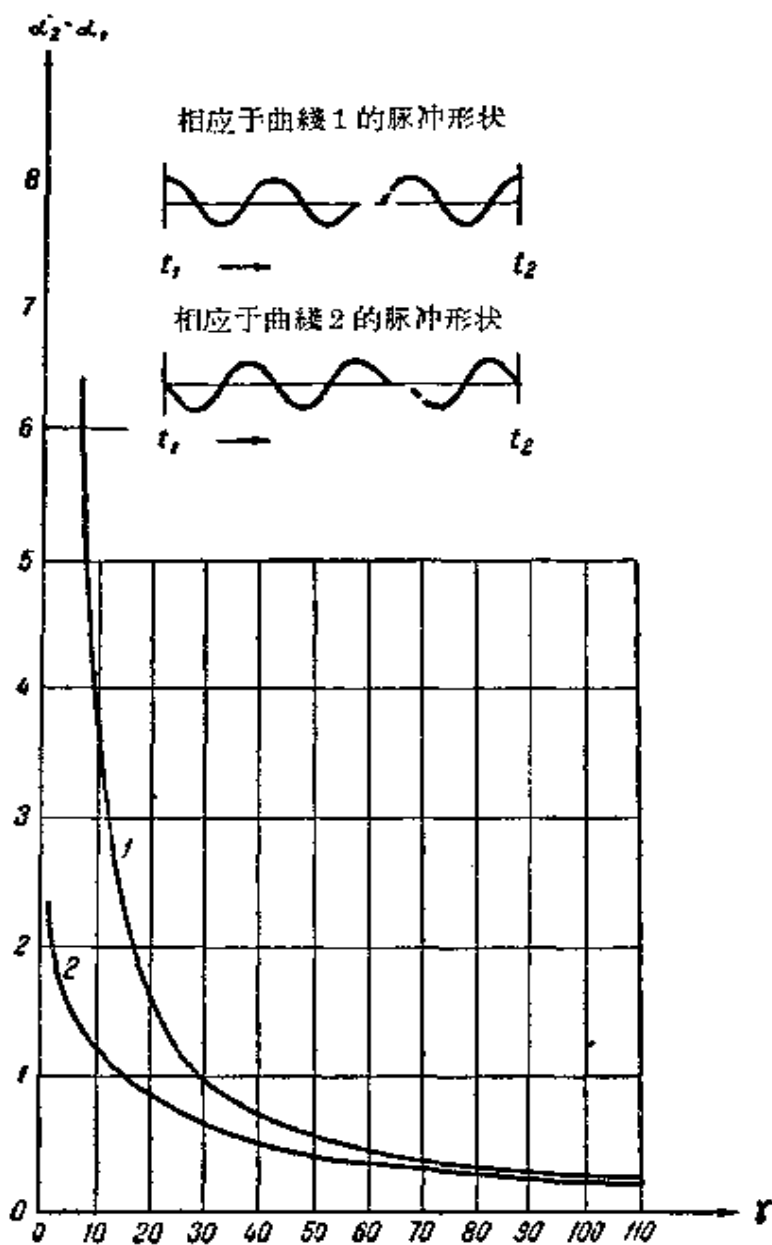


图 3.9 具有不同持续时间与不同起始相位的余弦形脉冲，传输时所占用的频带宽度

而用来确定频带中相对部分能量的公式具有

$$\eta_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2 \cos^2 k}{\frac{\pi^2}{4} - k^2} + \text{Si} 2 \left(\frac{\pi}{2} + k \right) - \text{Si} \left(\frac{\pi}{2} - k \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \left[\ln \left| \frac{\frac{\pi}{2} + k}{\frac{\pi}{2} - k} \right| + \text{Ci} 2 \left(\frac{\pi}{2} - k \right) - \text{Ci} 2 \left(\frac{\pi}{2} + k \right) \right] \right\}, \quad (3.25)$$

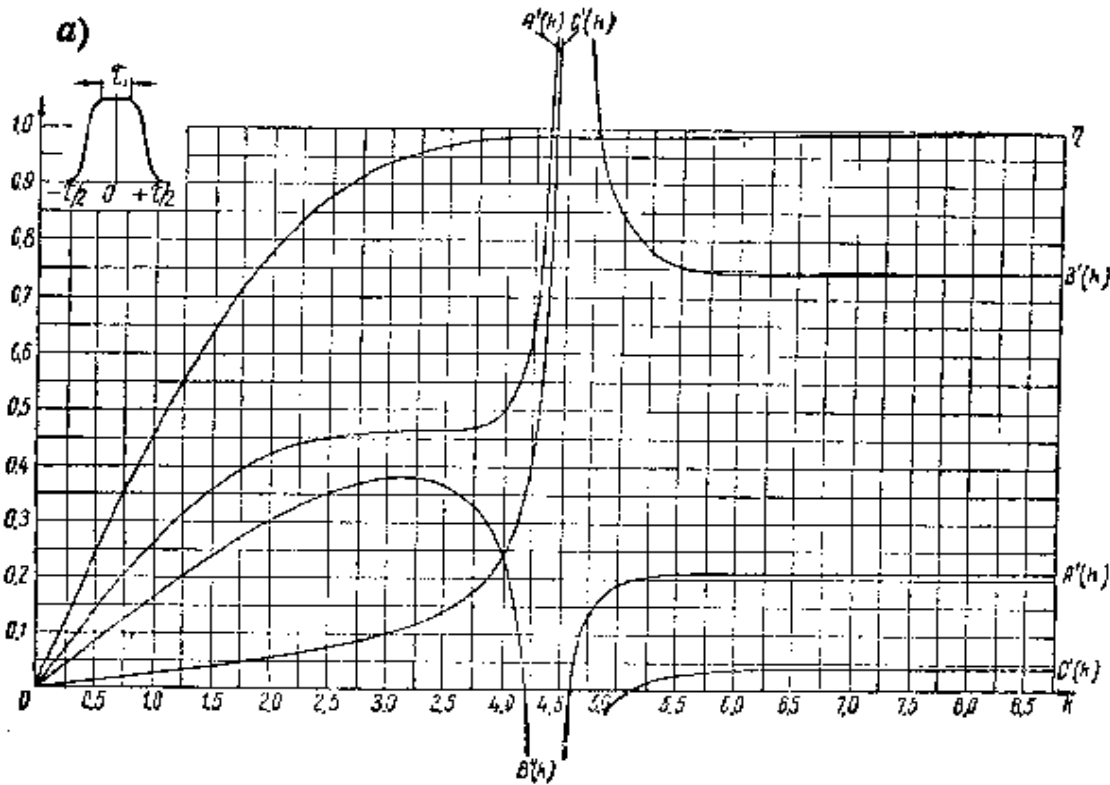
的形式。

传输余弦形脉冲所占用的频带宽度为 (以 k 为单位);

$$\Delta f \approx 4.0.$$

§ 3.5. 具有余弦-平方律圆化的脉冲

本节确定能量在频带中的分布与下列对称形脉冲在传输时所占



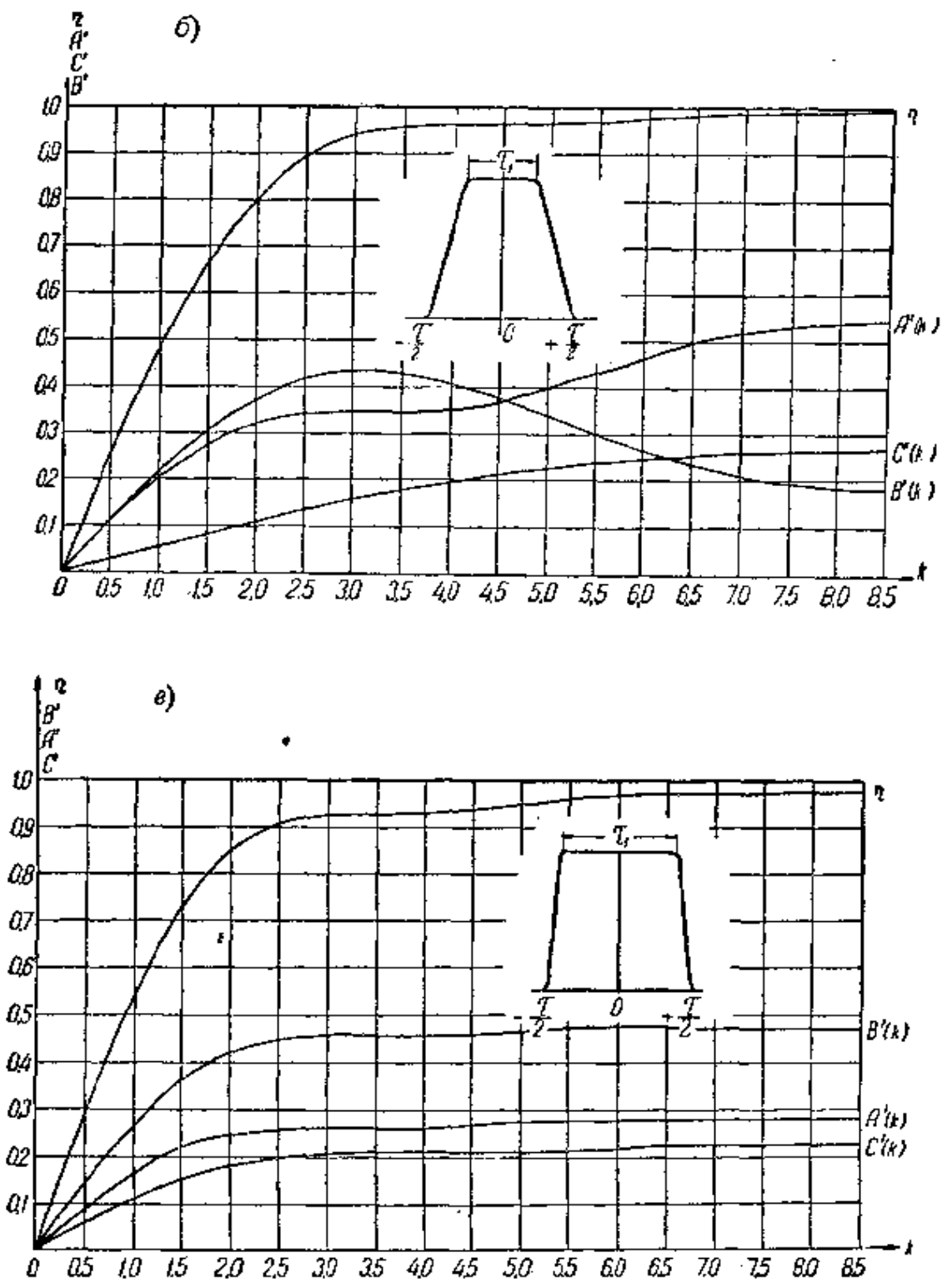


图 3.10 具有余弦-平方律圆化的脉冲在频带中的能量分布:
 a) $\xi=0.3$, b) $\xi=0.5$, e) $\xi=0.8$.

用的频带宽度；这种脉冲的中央部分为矩形，而两边按一定的表示式 $\cos^2 t$ 加以圆化。此种脉冲的形状示于图 3.10。我们将它称为具有余弦-平方律圆化的脉冲。具有余弦-平方律圆化，但没有中央矩形部分的脉冲（图 3.11），将称之为余弦-平方形脉冲。

对这些脉冲的研究，足以回答下列问题：在甚么情况下宜于将脉冲的两边按 $\cos^2 t$ 的规律加以圆化？在甚么时候利用梯形脉冲较好？具有余弦-平方律圆化的脉冲的时间函数用式

$$U(t) = \begin{cases} A \cos^2 \frac{\pi}{v - v_1} \left(t + \frac{v_1}{2} \right) & \text{当 } -\frac{v}{2} < t < -\frac{v_1}{2} \\ A & \text{当 } -\frac{v_1}{2} < t < +\frac{v_1}{2} \\ A \cos^2 \frac{\pi}{v - v_1} \left(t - \frac{v_1}{2} \right) & \text{当 } +\frac{v_1}{2} < t < +\frac{v}{2} \end{cases}, \quad (3.26)$$

来表示。式中的 v 与 v_1 值表示在图 3.10 中。

脉冲能量的频谱密度等于

$$ff^* = \left\{ \frac{A v}{2} \frac{1}{1 - \left[\frac{(1 - \xi)k}{\pi} \right]^2} \frac{\sin k + \sin \xi k}{k} \right\}^2, \quad (3.27)$$

式中

$$\xi = \frac{v_1}{v}, \quad k = \frac{\omega v}{2}.$$

确定频带中相对部分能量的公式具有

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{4}{\pi(3 + 5\xi)} \int_0^k \left\{ \frac{1}{1 - \left[\frac{(1 - \xi)k}{\pi} \right]^2} \frac{\sin k + \sin \xi k}{k} \right\}^2 dk = \\ &= \frac{4}{\pi(3 + 5\xi)} [A(k) + B(k) + C(k)] \end{aligned} \quad (3.28)$$

的形式，式中

$$A(k) = \int_0^k \frac{1}{\left[1 - (1 - \xi)^2 \left(\frac{k}{\pi} \right)^2 \right]^2} \frac{\sin^2 k}{k^2} dk; \quad (3.29)$$

$$B(k) = \int_0^k \frac{1}{\left[1 - (1-\xi)^2 \left(\frac{k}{\pi}\right)^2\right]^2} \frac{2 \sin k \sin \xi k}{k^2} dk; \quad (3.30)$$

$$C(k) = \int_0^k \frac{1}{\left[1 - (1-\xi)^2 \left(\frac{k}{\pi}\right)^2\right]^2} \frac{\sin^2 \xi k}{k^2} dk. \quad (3.31)$$

计算未列入积分表中的积分 $A(k)$, $B(k)$ 与 $C(k)$ 的公式列在附录 IV 中。验算表明, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $A(k) + B(k) + C(k)$ 趋于满足著名的莱列定理 (Теорема Рэлея) 的值。

当 $\xi \neq \frac{n-1}{n}$ (式中 $n=1, 2, 3, \dots$) 时, $A(k)$, $B(k)$ 与 $C(k)$

积分中的每一个积分, 在 $k = \frac{\pi}{1-\xi}$ 处有一个无穷大的间断点。然而这是无关紧要的, 因为所有三个积分之和在间断点处仍然是有限的, 这从物理概念来看也是很明显的。要确定非正常型积分的主值并不困难。

当 $\xi = \frac{n-1}{n}$ 时, 在积分 $A(k)$, $B(k)$ 与 $C(k)$ 中没有间断, 并且使附录 IV 中所列的、确定这些积分的公式得到简化。这就在许多情况下, 特别是当 ξ 具有接近于在实际中很重要的数值 1 (此时点 $\xi = \frac{n-1}{n}$ 分布得十分密集, 它们可以按简化公式来计算) 时, 减轻了计算工作量。

在图 3.10 中绘制了 $\xi=0.3, 0.5$ 与 0.8 时 $A(k)$, $B(k)$ 与 $C(k)$ 的图形。这些函数值相对于 $\frac{4}{\pi(3+5\xi)}$ 归一化, 因此, 在图中引用了新的记号 $A'(k)$, $B'(k)$ 与 $C'(k)$ 。当 $\xi=0.3$ 时, 积分有间断; 当 $\xi=0.5$ 与 0.8 时, 积分没有间断。

当 $\xi=0$, $B(k)=C(k)=0$ 时, 则得到本章开始所称的余弦-平方脉冲。对余弦-平方脉冲而言, 公式 (3.28) 具有

$$\eta_2 = \frac{1}{3\pi} \left\{ -\frac{4\pi^2 - 6k^2}{k(\pi^2 - k^2)} \sin^2 k + 4 \operatorname{Si} 2k + \operatorname{Si} 2(\pi + k) - \operatorname{Si} 2(\pi - k) + \frac{3}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{\pi + k}{\pi - k} \right| - \operatorname{Ci} 2(\pi + k) + \operatorname{Ci} 2(\pi - k) \right] \right\}, \quad (3.32)$$

的形式。

根据公式(3.28)—(3.31), 计算出脉冲传输时所占用的频带宽度(亦即包含有脉冲全部能量 99% 的频带宽度)如下:

ξ	0.0	0.3	0.5	0.8
Δf (以 k 为单位)	4.4	6.5	6.9	12.0

计算所用的表格[文献 27]中, 包括有 $0 \leq x \leq 100$ 的 $\operatorname{Si}(x)$ 与 $\operatorname{Ci}(x)$ 的数值。当确定接近于 0.99 的 η 值时(亦即当确定传输所占用的频带宽度时), 遇到需要计算 $x \geq 100$ 的 $\operatorname{Si}(x)$ 与 $\operatorname{Ci}(x)$ 值, 此时可以利用由近似级数所得到的公式:

$$\operatorname{Si}(x) \approx 1.57079633 - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^4} \right) \sin x - \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \right) \cos x;$$

$$\operatorname{Ci}(x) \approx \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \right) \sin x - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^4} \right) \cos x.$$

根据公式(3.12), 可计算传输梯形脉冲所占用的频带宽度。

由表 3.1 可以看出, 传输具有余弦-平方律圆化的脉冲所占用

余弦-平方律圆化脉冲与梯形脉冲的频带宽度 表 3.1

脉 冲 形 状	当 ξ 为下列值时频带的宽度 (以 $B^{(1)}$ 为单位)				
	0.0	0.3	0.5	0.8	1.0
余弦-平方律圆化的脉冲	2.8	4.2	4.4	7.7	20.6 ^③
梯形脉冲	2.6 ^②	2.5	3.9	6.5	20.6 ^③

① B ——以波特计的键控速度。为了从单位 k 变换至电信中所采用的单位 B , 上而所得到的余弦-平方律圆化的脉冲的频带宽度值已用 $\frac{\pi}{2}$ 除过。

② 三角形脉冲。

③ 矩形脉冲。

的频带(在所讨论的 ξ 值下), 要比传输梯形脉冲时宽一些。

由公式(3.11)与(3.27)可以看出, 在较大的 k 值时, 梯形脉冲频谱的包络线按 $\frac{1}{k^2}$ 的比例减低, 而具有余弦-平方律圆化脉冲的频谱包络线则按 $\frac{1}{k^3}$ 的比例减低。因此, 具有余弦-平方律圆化的脉冲, 在较大失调时的带外辐射降低得较快, 从而它比梯形脉冲要优越一些。

§ 3.6. 余弦-立方形脉冲

在 § 3.4 与 § 3.5 中曾讨论了余弦形与余弦-平方形脉冲(亦即按余弦的一次方与二次方规律所形成的脉冲)。有时候, 按余弦的更高次方规律, 特别是按三次方规律所形成的脉冲, 可能具有某些优点。下面就来计算一下这种被称为余弦-立方形的脉冲在传输时所占用的频带宽度。

持续时间间隔为 $-\frac{\tau}{2}$, $+\frac{\tau}{2}$, 且根据余弦三次方规律所形成的脉冲, 用函数

$$U(t) = \begin{cases} A \cos^3 \frac{\pi}{\tau} t & \text{当 } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq +\frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{当 } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}, \quad (3.33)$$

来描述。

脉冲能量的频谱密度由下式表示:

$$ff^* = \left\{ \frac{A\tau}{2} \frac{\frac{3}{2}\pi^3}{\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - k^2\right] \left[\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 - k^2\right]} \cos k \right\}^2, \quad (3.34)$$

而频带中的相对部分能量则由下式

$$\eta = \frac{1}{10\pi} \left\{ \frac{(41\pi^2 - 20k^2)k}{\left(\frac{\pi^2}{4} - k^2\right)\left(\frac{9}{4}\pi^2 - k^2\right)} \cos^2 k + 9 [\text{Si}(\pi + 2k) - \text{Si}(\pi - 2k)] + \text{Si}(3\pi + 2k) - \text{Si}(3\pi - 2k) + \frac{9}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{\pi + 2k}{\pi - 2k} \right| - \text{Ci}(\pi + 2k) + \text{Ci}(\pi - 2k) \right] + \frac{11}{6\pi} \left[\ln \left| \frac{3\pi + 2k}{3\pi - 2k} \right| - \text{Ci}(3\pi + 2k) + \text{Ci}(3\pi - 2k) \right] \right\}. \quad (3.35)$$

确定。

余弦-立方形脉冲在传输时所占用的频带宽度(以 k 为单位)等于:

$$\Delta f \approx 5.2.$$

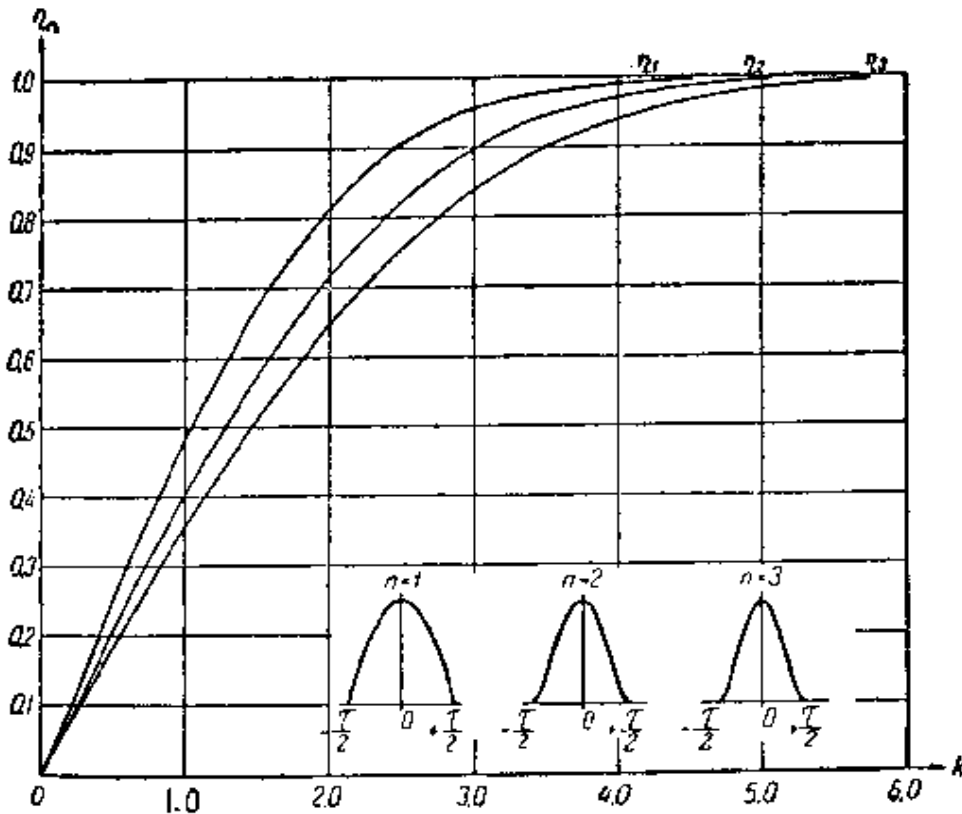


图 3.11 余弦形、余弦-平方形、余弦-立方形脉冲能量在频带中的分布

图 3.11 上表示根据公式(3.25)、(3.32)与(3.35)分别计算出来的余弦形(当 $\gamma = \frac{1}{2}$)、余弦-平方形与余弦-立方形脉冲的能量在频带中的分布。

由图 3.11 上的曲线可以看出, 較低的余弦方次能較快地达到任意一个給定的 η 值。因此, 按余弦較高次方規律所形成的脉冲, 比按余弦較低次方規律所形成的脉冲占有較寬的频带。由计算結果可以看出, 余弦形脉冲(当 $\gamma = \frac{1}{2}$)属占用最狹窄频带的信号, 从而极接近于“理想的”脉冲。

第四章 传输占用的频带宽度和信号的建立时间

本章研究传输占用频带宽度与信号建立时间之间的关系。

指出在许多情况下, 希望所用信号不仅具有最小的频带, 而且具有最少的建立时间。因此, 引入了一般的、能同时从占用频带方面与建立时间方面来评价信号的准则。这个准则规定为

$$k_y = \frac{\omega \tau_y}{2},$$

的形式。式中 ω ——频带宽度; τ_y ——信号的建立时间。

对不同形状的脉冲, 确定所引用准则的数值。

文中指出, 如果把最小的 k_y 值用作品质准则的话, 則最佳的脉冲形状与占有最小频带脉冲的形状并不一样。

§ 4.1. 一般概念

在第二章中确定了占有最小频带的信号形状, 而在第三章中找出了不同形状信号在传输时所占用频带宽度的数值。然而, 占有最小频带的信号在实际应用中并不总是最佳的。将信号圆化减少了频带的宽度, 但有时候圆化可能使接收处的信号释义困难。特别是在

电报中，不仅希望利用占有最小频带的信号，而且也希望利用建立时间最小的信号。在一些场合下，信号建立时间短是重要的，而在另一些场合下，节省频带宽度则是十分重要的因素。因此，既希望根据这些指标中的每一个单独地来研究信号，同时也要制定一般的准则，以便能同时从两个观点来对信号加以评价。

§ 4.2. 信号建立时间的定义

既然我们打算确立传输所占用频带宽度与信号建立时间之间的关系，那末，首先必需定出这些量中每一个的定义，这些定义应当符合逻辑，并可能在实际中应用。

现在来看一下 § B. 3 中国际上常用的频带宽度的定义：如下的一种频带宽度称为被占用的频带宽度，即在該频带的下界与上界以外，平均的辐射功率均等于該辐射全部平均功率的 0.5%。有的文献中[文献40]将信号建立时间规定为如下的一种时间，即在該段时间内，电报电流由稳态值的十分之一过渡到十分之九（或者与此相反）。对于不对称的信号，相应于信号在开始与终了的建立时间，可能有两个不同的数值。

然而，这个定义只是对电报信号而言，因此具有局限性。这定义也没有考虑到过渡过程的其他一些参数，例如振动度、超越度（这些参数表征着信号的形状）。系数 0.1 与 0.9 也象频带宽度所用的系数一样，是任意选定的。不过，从实用观点来看，这定义是方便的，因而也就得到了广泛应用。在 § B. 3 中所有谈到关于频带宽度定义的一些优点，也适用于信号建立时间。今后，我们将利用这些频带宽度与信号建立时间的定义。

§ 4.3. 评价信号的一般判据

现在来引入同时考虑信号所占用的频带与信号建立时间时，评价信号的一般判据。在表明能量频谱密度与占用频带和信号持续时间之间关系的方程中（参阅第三章），这些指标的每一个是对称对应

的。因此，为了表征信号，通常引入共用指标

$$k = \frac{\omega\tau}{2}, \quad (4.1)$$

式中

ω ——占用的频带宽度；

τ ——信号的持续时间。

k 值愈小，频带和信号持续时间的利用也愈好。但是，如已指出，在许多场合，总希望利用建立时间最小的信号。

将信号持续时间写成

$$\tau = \tau_{ocH} + 2\tau_y, \quad (4.2)$$

的形式，式中

τ_{ocH} ——稳态信号的持续时间；

τ_y ——信号建立时间。

为了简单起见，认为信号增长的时间与信号降低的时间相等。

将(4.2)代入(4.1)中，并引入符号

$$k_{ocH} = \frac{\omega\tau_{ocH}}{2}; k_y = k \frac{\tau_y}{\tau} = \frac{\omega\tau_y}{2}, \quad (4.3)$$

得出

$$k = k_{ocH} + 2k_y. \quad (4.4)$$

判据 k_y 表明了频带与信号建立时间的利用情况。

§ 4.4. k_y 的数值

矩形、梯形与三角形脉冲 确定这些脉冲在传输时占用的频带宽度的公式已列在第三章中。图 4.1 表示出以 k 为单位的频带宽度与 $\xi = \tau_1/\tau$ 的关系图形； τ_1 为脉冲顶部的持续时间， τ 为脉冲底部的持续时间。

$\xi = 0$ 的情形相应于三角形脉冲，如果 $\xi = 1.0$ ，则脉冲具有矩形形状。由图 4.1 可以看出，当 ξ 由 0.0 变化至 0.3 时，传输所占用的频带宽度实际上没有变化，而当 ξ 由 0.6 变化至 1 时，传输所

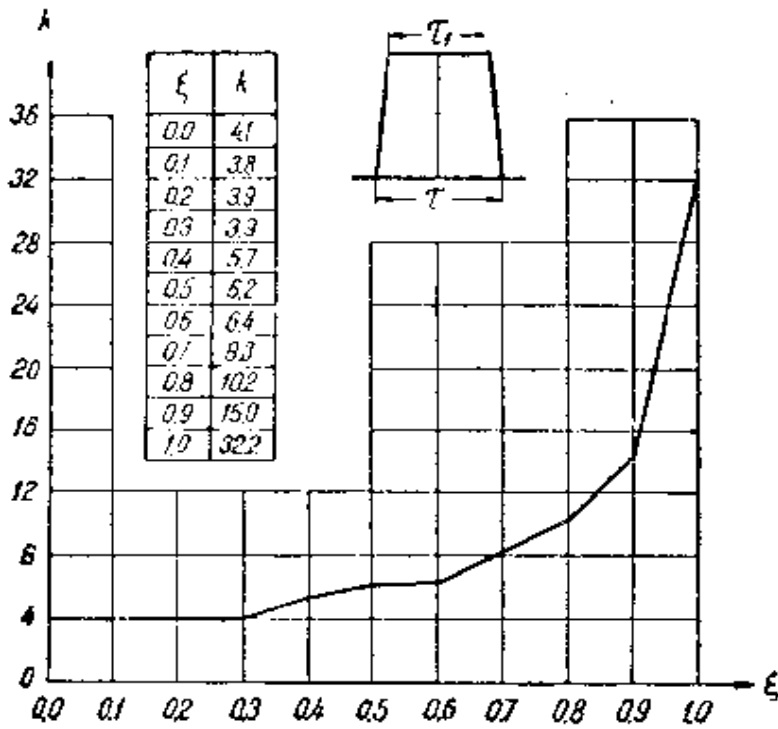
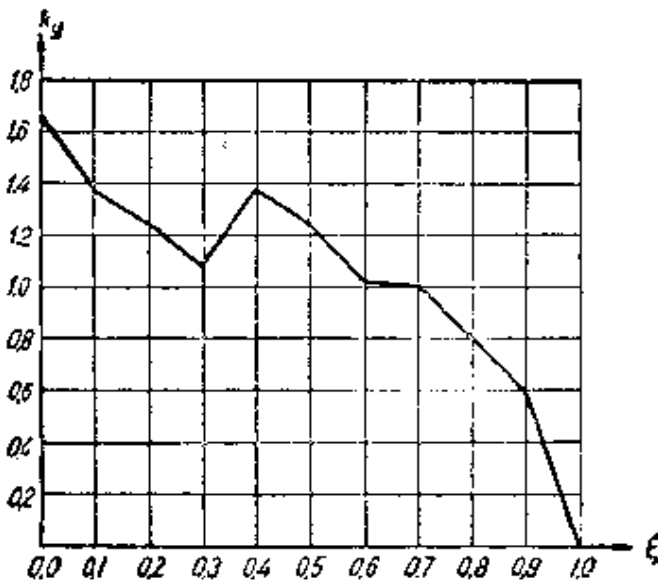


图 4.1 传输梯形脉冲占用的频带

图 4.2 函数 $k_y = f(\xi)$

占用的频带宽度变化得很剧烈。

信号建立时间等于：

$$\frac{\tau_y}{\tau} = 0.4(1 - \xi),$$

$$k_y = 0.4(1 - \xi)k.$$

图 4.2 所示是 $k_y = f(\xi)$ 的关系图形。

余弦形脉冲（当 $\nu = \frac{1}{2}$ ）时间函数用表示式为

$$U(t) = \cos \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{当 } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2},$$

$$U(t) = 0 \quad \text{当 } |t| > \frac{\tau}{2}.$$

余弦形脉冲在传输时所占用的频带宽度(以 k 为单位)等于 4.0 (参阅 § 3.4)。

脉冲建立时间

$$\frac{\tau_y}{\tau} = \frac{t_2 - t_1}{\tau} = 0.312,$$

式中 t_1 与 t_2 由方程式

$$\cos \frac{\pi}{\tau} t_1 = 0.1,$$

$$\cos \frac{\pi}{\tau} t_2 = 0.9,$$

确定。

$$k_y = \frac{\tau_y}{\tau} k = 1.25.$$

余弦-平方形脉冲

时间函数用下式

$$U(t) = \cos^2 \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{当 } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2},$$

$$U(t) = 0 \quad \text{当 } |t| > \frac{\tau}{2}$$

表示。

传输所占用的频带宽度 $k=4.4$ (参阅 § 3.5)。脉冲建立时间

$$\frac{\tau_y}{\tau} = \frac{t_2 - t_1}{\tau} = 0.294,$$

式中 t_1 与 t_2 由方程

$$\cos^2 \frac{\pi}{\tau} t_1 = 0.1,$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{\tau} t_2 = 0.9$$

确定。

$$k_y = \frac{\tau_y}{\tau} k = 1.30.$$

余弦-立方形脉冲

时间函数用表达式

$$U(t) = \cos^3 \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{当 } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2};$$

$$U(t) = 0 \quad \text{当 } |t| > \frac{\tau}{2},$$

来描述。

占用的频带宽度 $k=5.2$ (参阅 § 3.6)。

脉冲建立时间

$$\frac{\tau_y}{\tau} = \frac{t_2 - t_1}{\tau} = 0.263.$$

式中 t_1 与 t_2 由方程

$$\cos^3 \frac{\pi}{\tau} t_1 = 0.1,$$

$$\cos^3 \frac{\pi}{\tau} t_2 = 0.9,$$

确定。

$$k_y = \frac{\tau_y}{\tau} k = 1.4.$$

“理想”脉冲 第二章中，我们将持续时间有限，且在给定频带中包含最大能量部分的脉冲，称之为“理想”脉冲。

“理想”脉冲在传输时所占用的频带宽度， $k=3.6$ (参阅 § 2.5)。

建立时间按公式(2.39)确定：

$$\frac{\tau_y}{\tau} = 0.365.$$

与

$$k_y = \frac{\tau_y}{\tau} k = 1.31.$$

借助于共用判据 k_y , 可以从所得到的数据来评价信号的各种形状。从判据 k_y 的观点来看, 最佳的为矩形脉冲(尽管它占有最宽的频带); 而占有最小频带的“理想”脉冲, 属于较差脉冲。

第五章 以减低带外辐射为目的的信号的形成

本章指出选择信号的形状时, 不仅应考虑所占用的频带与建立的时间, 而且也应考虑当频率增加时带外辐射减低的速度。

导出用函数及其导数的跃变来表示频谱密度的公式, 由这些公式可以看出, 频谱分量与跃变的形式(亦即与函数及其导数有没有跃变)有关, 同时也与跃变的数目以及它们的分布有关。当频率增加时, 部分频谱减低的速度仅与跃变的形式有关, 而与该种形式的跃变数目无关。

文中指出, 对于有限持续的信号 $U(t)$, 如果 $U(t)$, $U'(t)$, \dots , $U^{(n-1)}(t)$ 没有跃变, 而 $U^{(n)}(t)$ 处处有限, 那末, 当频率 ω 增加时, 频谱密度减低得不比 $\frac{C}{\omega^{n+1}}$ 慢。

研究了新的脉冲形状(根据 n 阶余弦规律等所形成的脉冲形状), 当频率增加时, 这些脉冲的频谱降低得不比 $\frac{C}{\omega^{n+1}}$ 慢(此处 $n \geq 4$)。

在本章结尾的表上, 列出了表征不同形状脉冲的主要指标。

§ 5.1. 前 言

在第二章中, 曾经研究过有限持续时间的脉冲应当具有甚么样的形状, 才能在给定的频带中包含有频谱全部能量的最大部分问题。

但是, 正如同在第四章中曾经指出的那样, 占有最小频带的信号, 在实际应用中往往并不总是最佳的; 在许多场合下, 希望所利用的信号不仅要占有最小的频带, 而且也要有最少的建立时间。

也可以从减低带外辐射的要求来对信号的形状进行评价。如同

§ B. 3 中曾經指出的那樣，按照通常的定義，將包含有 99% 的輻射功率的頻帶稱為輻射所占用的頻帶寬度，而所謂帶外輻射，則理解為在被“占用”的頻帶界外所輻射的功率。因此，帶外輻射的功率永遠是不變的，它為發射機所發射總功率的 1%。

作為第一次近似（不考慮接收機從相鄰波道所占用頻帶中接收的能量）可以認為，互相干擾只是由於相鄰波道的帶外輻射所產生的。然而，既然帶外輻射的功率百分含量是常數，那末，只有以適當的方式將帶外輻射分布至相鄰波道所占用的頻帶中，才能借對信號頻譜進行工作以減低互相干擾。在實際中，希望帶外輻射的頻譜能以最快的速度減低。下面我們就來研究這方面實際上能達到何種程度。可以看出，高頻時頻譜的漸近性狀實質上是由信號的連續性質來確定的，有可能選擇出這樣一種信號形狀，當頻率增長時，它能保證帶外輻射頻譜具有所期望的減低速度。

如同第九章中將要指出的那樣，減低互相干擾的問題，可化為尋求基本信號的問題（在用同樣的系統傳輸時，這種信號構成最小能量的干擾）。因此，我們將要研究由基本信號所產生的帶外輻射。

在分析通過對基本信號形狀進行工作以減低帶外輻射的可能性之前，我們先從波道通過能力的仙農理論（Теория Шеннона）所引出的推論的觀點來研究此問題。

§ 5.2. 從仙農理論關於波道通過能力的觀點來研究 減低帶外輻射能量的可能性

仙農所得到的確定波道通過能力的公式(B. 1)，是在將信號展開為柯捷里尼可夫級數

$$U(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} U\left(\frac{n}{2F}\right) \frac{\sin 2\pi F\left(t - \frac{n}{2F}\right)}{2\pi F\left(t - \frac{n}{2F}\right)}, \quad (5.1)$$

的基礎上建立的。

這個級數的基本函數

$$\frac{\sin 2\pi F\left(t - \frac{n}{2F}\right)}{2\pi F\left(t - \frac{n}{2F}\right)}$$

在任意有限的时间区间都不等于零。

在无穷的时间区间为已知的信号 $U(t)$ ，可以展开为柯捷里尼可夫级数(5.1)，并且它的频谱将在有限的频带之内。有限持续的信号只能近似地用柯捷里尼可夫级数(5.1)来逼近。

设信号 $U(t)$ 的持续时间等于 $(t_2 - t_1)$ (见图 5.1)；为了逼近该信号，可以将它延续至存在区间 $(t_2 - t_1)$ 的界限以外 (见图 5.1 上的虚线)，从而使它变为无穷宽，而后再将这个无穷宽的信号展开为柯捷里尼可夫级数(5.1)。

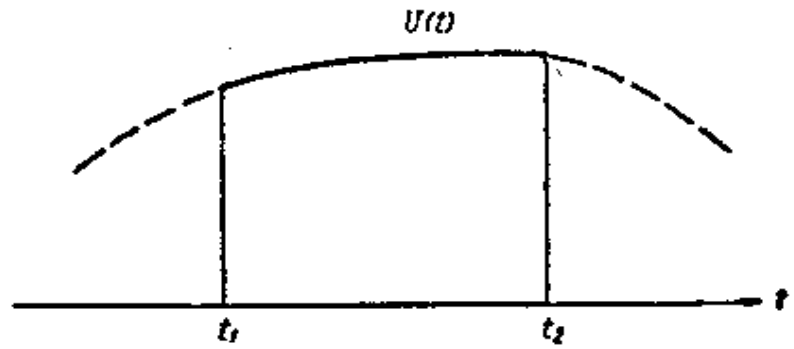


图 5.1 逼近有限持续信号的可能性

当然，我们可以用不同的方式将信号 $U(t)$ 延续至

区间 $(t_2 - t_1)$ 以外；每一种延续将有它的对应的柯捷里尼可夫级数。然而，如果我们希望尽可能逼近得较为精确些，那末，我们应当按使带外辐射频谱减低得最快的方式来延续信号，为此，正如以后将要指出的一样，必需使信号延续得最光滑，亦即使信号的绝大多数阶导数没有跃变。

用这种方式所延续出来的信号在一定的有限频带中具有稠密的频谱，在此频带范围以外，频谱等于零，因此不会对相邻波道产生干扰。然而实际上，这种延续方法须假定信号在无限长的时间区间为已知，因此，将它沿任何一种通信波道传输是无用的。

因此，仙农理论只属于被传输的信号有无限长久的极限情形。然而，在实际中经常能满足的一定条件下，信号的幅值近似地依从

于高斯统计分布。这些条件为：用来表示信号的随机函数应当是平稳的，它的分布规律的特征函数（亦即分布规律的傅里叶变换）在开始时（零点）应当是有界的，在不同量子时刻或转换时刻的函数值应当是独立的〔文献 25，第 13 章第 513 页〕。这种延续得足够光滑的信号，在许多情况下可以很好地用柯捷里尼可夫级数 (5.1) 来逼近。这种信号能够具有很小的带外辐射。

带外辐射小的信号的例子是人的语言。这类信号已有许多作者进行过研究〔文献 40，第 III 卷〕，这些作者认为，对时间延续得足够长和不同噪音的数目足够多时，语言的统计分布近于高斯分布，且在这方面接近于“白”噪声，这种噪声准确地满足上面所提出的数学条件。因此，语言的带外辐射可以降低至十分小的值，但是它不能趋于零，因为语言仍然是不太准确地依从于高斯分布，此外，语言只在有限的时间间隔中是持续的。

利用滤波器可以在不使清晰度变得很坏的条件下降低语言的带外辐射。具有的一定特性的滤波器的节数愈多，这种降低将愈大。

电报信号与语言不同，通常它仅有两个不同的电平，不能用高斯分布来逼近；因此，它是强大的互相干扰源。

为了在振幅键控时得到接近于高斯分布的电报信号，应当利用如下一种编码制，在这种编码制下，不同的符号相应于不同的信号电平。然而，这样就引起了技术上的困难。理论上的仙农型信号共相邻两时刻的振幅差至少等于噪音电平。根据概率理论中的著名定理：大量小的且相互无关的随机量之和的分布规律以高斯规律为极限。因此，如果信号在任何时刻观测起来为大量电平不同的小的且相互独立的信号之和，那末，这种信号就服从高斯分布规律。

§ 5.3. 以函数及其导数的跃变表示的傅里叶积分变换

下面用时间函数及其导数的跃变来表示傅里叶变换。符·阿·柯捷里尼可夫也曾得到类似的结果，并刊载在〔文献 16〕中。

設 $U(t)$ 为 $-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}$ 上的有限持續函数, 它在其存在区域内各个不同部分中可用直綫或 p 次拋物綫来表示, $y = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_p t^p$ 。为了简单起见, 将假定函数 $U(t)$ 为偶函数。

其次, 假定 $U(t)$ 或它的任意阶导数在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, 諸点上有跃变 $I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \dots, I'_{\alpha_1}, I'_{\alpha_2}, \dots, I''_{\alpha_1}, I''_{\alpha_2}, \dots$, 这些跃变由

$$\begin{aligned} I_{\alpha_1} &= U(\alpha_1 + 0) - U(\alpha_1 - 0), \\ I'_{\alpha_1} &= U'(\alpha_1 + 0) - U'(\alpha_1 - 0), \end{aligned}$$

等来确定。

函数 $U(t)$ 的傅里叶变换具有

$$f(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} U(t) \cos \omega t dt \quad (5.1 a)$$

的形式。

将 (5.1 a) 式进行分部积分, 得到

$$\frac{2}{\omega} [U(t) \sin \omega t] - \frac{2}{\omega} \int_0^{\frac{\tau}{2}} U'(t) \sin \omega t dt. \quad (5.2)$$

假定 $U(t)$ 在 α_1 点有跃变。在 0 至 $(\alpha_1 - 0)$ 与 $(\alpha_1 + 0)$ 至 $\frac{\tau}{2}$ 范围内, (5.2) 式的第一项具有下列形式:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\omega} \left[U\left(\frac{\tau}{2}\right) \sin \frac{\omega \tau}{2} - U(\alpha_1 + 0) \sin \alpha_1 \omega + U(\alpha_1 - 0) \sin \alpha_1 \omega - 0 \right] = \\ = \frac{2}{\omega} \left[U\left(\frac{\tau}{2}\right) \sin \frac{\omega \tau}{2} - I_{\alpha_1} \sin \alpha_1 \omega \right]. \end{aligned}$$

在零至 $\frac{\tau}{2}$ 的积分区间界限以外, 函数 $U(t)$ 等于零。因此,

$-U\left(\frac{\tau}{2}\right)$ 为在 $\frac{\tau}{2}$ 点处的跃变; 如果同样在 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k$ 处有其他跃变, 那末很明显, 将积分区间分为由 0 至 α_1 , 由 α_1 至 α_2 等等, 于是 (5.2) 中第一项具有

$$-\frac{2}{\omega} \sum_{\alpha_1}^{\alpha_k} I_{\alpha_i} \sin \alpha_i \omega$$

的形式，式中将函数 $U(t)$ 的所有跃变（包括在 $\frac{\pi}{2}$ 点处的跃变）加起来了。

如果我们以同样的方式将(5.2)中的第二项进行分部积分，则得到

$$-\frac{2}{\omega} \left[-\frac{U'(t) \cos \omega t}{\omega} \right] - \frac{2}{\omega^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} U''(t) \cos \omega t dt, \quad (5.3)$$

同样，表达式(5.3)中第一项的数值正好等于

$$-\frac{2}{\omega^2} \sum_{\alpha_1}^{\alpha_k} I'_{\alpha_i} \cos \alpha_i \omega,$$

式中 I'_{α_i} 表示 $U'(t)$ 在 $t = \alpha_i$ 处的跃变，并将所有跃变全部相加起来。用类似的方法再将(5.3)中的第二项进行分部积分，得到

$$-\frac{2}{\omega^2} \left[-\frac{U''(t) \sin \omega t}{\omega} \right] + \frac{2}{\omega^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} U'''(t) \sin \omega t dt.$$

这个表示式中第一项的值等于

$$\frac{2}{\omega^3} \sum_{\alpha_1}^{\alpha_k} I''_{\alpha_i} \sin \alpha_i \omega.$$

用类似的方法一直继续进下去，得出最后的结果为

$$\begin{aligned} f(\omega) = & -\frac{2}{\omega} \sum_{\alpha_1}^{\alpha_k} I_{\alpha_i} \sin \alpha_i \omega - \frac{2}{\omega^2} \sum_{\alpha_1}^{\alpha_k} I'_{\alpha_i} \cos \alpha_i \omega + \\ & + \frac{2}{\omega^3} \sum_{\alpha_1}^{\alpha_k} I''_{\alpha_i} \sin \alpha_i \omega + \frac{2}{\omega^4} \sum_{\alpha_1}^{\alpha_k} I'''_{\alpha_i} \cos \alpha_i \omega \\ & - \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

这个级数是有限的，因为如果 p 表示任意一条抛物线弧的高次幂，那末 $(p+1)$ 阶导数 $U^{(p+1)}(t)$ 将处处等于零，从而没有跃变 I_p^{p+1} 或任何更高阶项。但是，公式(5.4)也能够用在无穷级数的情形下

(只要这个级数是收敛的)。

由公式(5.4)可以看出, 频谱分量的大小与跃变的数目有关, 也与跃变的形式 (亦即跃变是否发生在函数中或者在其某阶导数中) 和跃变的分布有关。例如, 当 t 接近于零值时, 函数本身及其偶数阶导数的跃变产生较小的频谱分量值, 且这值以奇数次幂与频率成反比地减小。然而, 当 t 接近于 $\frac{\pi}{2\omega}$ 时, 同样形式与同样大小的跃变显著地增大了这些频谱分量。

频谱随着频率增长而减低的速度仅与跃变的形式有关, 而与该种形式的跃变数量无关。

§ 5.4. 脉冲形状与带外辐射衰减速度之间的关系

频谱随着频率 ω 的增加而减低的速度, 可以用限制曲线来评价, 在这条曲线以下, 分布有用傅里叶积分变换来表示的全部频谱密度最大值。我们来证明, 当 ω 值足够大时, 这条限制曲线与 $\frac{1}{\omega^n}$ 成比例地减低, 此处 $(n-1)$ 表示代表有限持续信号的函数 $U(t)$ 的第一个具有跃变的导数的阶数。

从物理意义来看, 我们将假定函数 $U(t)$ 的傅里叶变换是存在的。

函数 $U(t)$ 异于零的区间 $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ 可以被分成有限数目的区域, 在每一个这样的区域中, 函数将具有一种符号, 且将或者是单调地增加或减少, 或者保持不变值。

现在来研究在足够大的 ω 值下, 在这些区域的任何一个内的傅里叶变换(5.1a)的值。在长度为 $\frac{\pi}{\omega}$ 的短区间上, 被积式将是正的, 且将在积分中构成某一增量, 该增量用 S_1 来表示。在随后一个长度为 $\frac{\pi}{\omega}$ 的区间上, 被积式将是负的, 且将构成增量 $-S_2$, 依此类推

至 S_l ，此处 S_l 对应于所研究区域中的最后整个半周期。于是，我們得到諸項之和

$$S_1 - S_2 + S_3 - \dots \pm S_l.$$

这些項交替地为正与負，而在大小方面或者是單調上升的，或者是單調下降的。

显然，在任何一种情况下，这种和或者不能超过 S_1 ，或者不能超过 S_l （要看这两值中的哪一个大一些而定）。同样很明显，这些項中任一个也不可能超过 $M \frac{\pi}{\omega} \tau$ ，此处 M 为所研究区間中 $U(t)$ 的最大值。

在上述和的值中，还有可能要加上两个增量，这两个增量是在区域始端与末端处（当在不完整区間中进行积分时）所得到的。每一个这样的增量不可能超过 $M \frac{\pi}{\omega} \tau$ ，因此，在所研究区域中， $\int U(t) \cos \omega t dt$ 值不可能超过 $\frac{3M\pi\tau}{\omega}$ 。在其他区域中求和后，得出在整个积分区間 $-\frac{\tau}{2}$ ， $+\frac{\tau}{2}$ 中，积分值不可能超过 $\frac{C}{\omega}$ ，此处 C 为某一个常数。显然，对于含有 $\sin \omega t$ 的积分，也可以获得同样的結果。

根据上面的討論可以証明，如果 $U(t)$ 沒有跃变且 $U'(t)$ 处处有限（第二个条件包括了第一个条件），那末，傅里叶变换不超过 $\frac{C}{\omega^2}$ 。

应当指出，关于函数 $U(t)$ 的大小沒有跃变的假定，也同样表示着在区間 $-\frac{\tau}{2}$ ， $+\frac{\tau}{2}$ 的端点处，函数具有零值，亦即 $U\left(-\frac{\tau}{2}\right) = U\left(+\frac{\tau}{2}\right) = 0$ 。

将(5.1a)式进行分部积分，得到

$$f(\omega) = \left[\frac{U(t) \sin \omega t}{\omega} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U'(t) \sin \omega t dt.$$

如果 $U(t)$ 没有跃变, 则第一项等于零。积分 $\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U'(t) \sin \omega t dt$ 乃是对函数 $U'(t)$ 的傅里叶变换, 如同我们所曾见到的一样, 这个傅里叶变换值将比 $\frac{C'}{\omega}$ 小, 此处 C' 为某一个常数。

用类似的方式可以证明, 如果 $U(t)$ 与 $U'(t)$ 没有跃变, 且 $U''(t)$ 处处有限, 则傅里叶变换 $f(\omega)$ 应当小于 $\frac{C}{\omega^3}$ 。

将这种推理继续下去, 于是得出结论: 如果 $U(t)$, $U'(t)$, \dots , $U^{(n-1)}(t)$ 没有跃变, 而 $U^{(n)}(t)$ 处处有限, 则频谱的减低不慢于 $\frac{C}{\omega^{n+1}}$ 。

§ 5.6. 频谱减低不慢于 C/ω^{n+1} 的有限持续信号的形状

现在我们来确定, 信号应当具有甚么样的形状, 才能使其对应的频谱减低得不比 $\frac{C}{\omega^{n+1}}$ 慢。

总有可能选择这样一个函数 $U(t)$, 使它和它的导数在共存在区域 $-\frac{\tau}{2}$, $+\frac{\tau}{2}$ 内没有跃变。例如, 谐波函数与多项式等均满足这个条件。然而, 除此而外, 还需要 $U(t)$ 及其给定阶数以下的导数在 $\pm\frac{\tau}{2}$ 点处等于零。为了满足这些条件, 可以选择下列形式的函数:

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= A \cos^n \frac{\pi}{\tau}(t) & \text{当 } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq +\frac{\tau}{2} \\ U(t) &= 0 & \text{当 } |t| > \frac{\tau}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

当这样选择函数下, $(n-1)$ 阶以内的导数在 $\pm\frac{\tau}{2}$ 点将没有跃变; 然而, 尽管 n 阶导数的其他项在 $\pm\frac{\tau}{2}$ 点均为零, n 阶导数中将

包括 $\sin^n \frac{\pi t}{\tau}$ 形式的项。这一项在 $\pm \frac{\tau}{2}$ 点将不为零。因此，满足条件

(5.5) 的函数，能保证频谱减低得不比 $\frac{C}{\omega^{n+1}}$ 慢。

引入符号 $k = \frac{\omega \tau}{2}$ 。在不同的 n 值下，函数 (5.5) 的频谱密度为：

当 $n=1$ (余弦形脉冲)

$$f_1(\omega) = \frac{A\tau}{2} \frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - k^2} \cos k; \quad (5.6)$$

当 $n=2$ (余弦-平方形脉冲)

$$f_2(\omega) = \frac{A\tau}{2} \frac{\pi^2}{k(\pi^2 - k^2)} \sin k; \quad (5.7)$$

当 $n=3$ (余弦-立方形脉冲)

$$f_3(\omega) = \frac{A\tau}{2} \frac{\frac{3}{2}\pi^3}{\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - k^2\right] \left[\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 - k^2\right]} \cos k; \quad (5.8)$$

.....

在 $n > 2$ 的其他数值下

$$\left. \begin{aligned} f_{2n}(\omega) &= f_2(\omega) \frac{\pi^{2n-1} (2n)!}{2^{2n-1} \prod_{s=2}^n (s^2 \tau^2 - k^2)} \\ f_{2n+1}(\omega) &= f_1(\omega) \frac{\pi^{2n} (2n+1)!}{2^{2n} \prod_{s=1}^n \left[\frac{(2s+1)^2 \tau^2}{4} - k^2 \right]} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

此外，为了求出 $f_n(\omega)$ ，可以利用递推公式

$$f_n(\omega) = f_{n-2}(\omega) \frac{n(n-1)\tau^2}{(n^2\tau^2 - 4k^2)}. \quad (5.10)$$

图 5.2 中表示出当 $A\frac{\tau}{2} = 1$ 时，按分贝所计算出来的余弦形、余弦-平方形与余弦-立方形脉冲频谱的包络线。

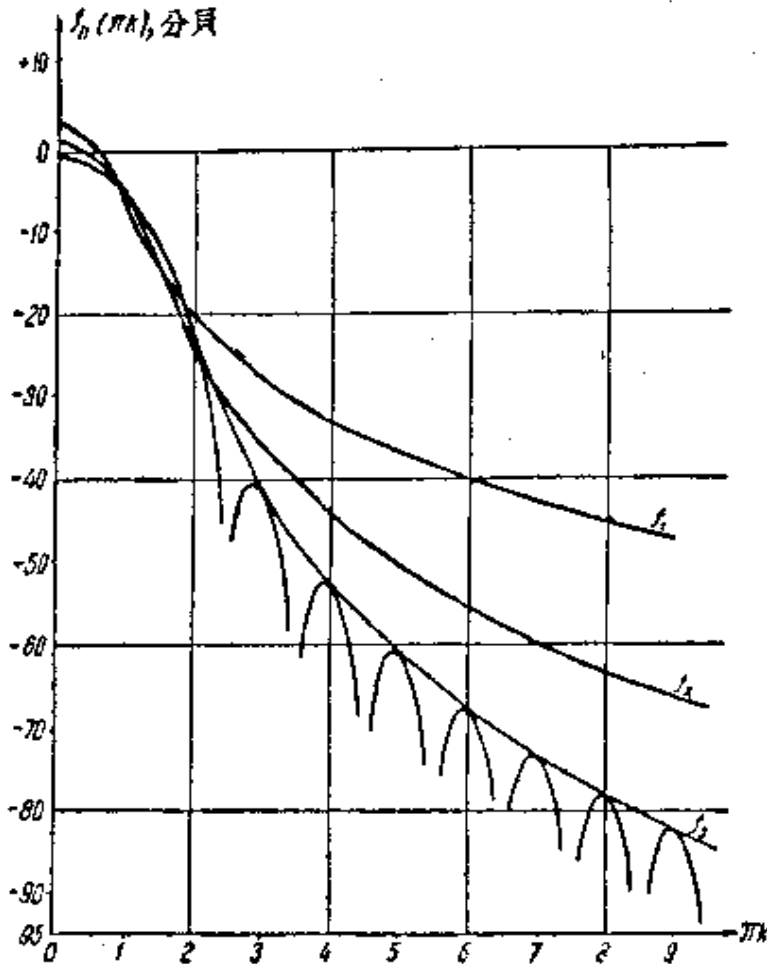


图 5.2 余弦形、余弦-平方形与余弦-立方形脉冲频谱的包络线
($A\tau/2=1$, 以分贝计)

有时候希望有平顶形的信号，亦即希望信号由 $(-\frac{\tau_1}{2}, +\frac{\tau_1}{2})$ 中的矩形部分，与 $(-\frac{\tau}{2}, -\frac{\tau_1}{2})$ 和 $(\frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau}{2})$ 中的边缘所组成。在这种情况下，如果我们希望频谱减低得不比 $\frac{C}{\omega^{n+1}}$ 慢，则应当满足下列条件：

$$\left. \begin{aligned}
 &U\left(\pm\frac{\tau}{2}\right) = U'\left(\pm\frac{\tau}{2}\right) = \dots = U^{(n-1)}\left(\pm\frac{\tau}{2}\right) = 0 \\
 &U\left(\pm\frac{\tau_1}{2}\right) = A \\
 \text{与} &U'\left(\pm\frac{\tau_1}{2}\right) = U''\left(\pm\frac{\tau_1}{2}\right) = \dots = U^{(n-1)}\left(\pm\frac{\tau_1}{2}\right) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

既然描述脉冲中央部分的水平直线的各阶导数处处等于零，那末必需使函数 $U(t)$ 在 $\left(-\frac{\tau}{2}, -\frac{\tau_1}{2}\right)$ 与 $\left(\frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau}{2}\right)$ 上满足条件 (5.11)。

为了寻求平顶形信号（它具有所期望的带外辐射减低速度）的边缘形状，现在来研究下列形式的信号：

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= A \cos^n \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) && \text{当 } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq -\frac{\tau_1}{2} \\ U(t) &= A && \text{当 } -\frac{\tau_1}{2} \leq t \leq \frac{\tau_1}{2} \\ U(t) &= A \cos^n \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left(t - \frac{\tau_1}{2} \right) && \text{当 } \frac{\tau_1}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

在 $-\frac{\tau}{2}$ 至 $-\frac{\tau_1}{2}$ 区段上：

$$\left. \begin{aligned} U'(t) &= -An \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \cos^{n-1} \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) \sin \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) \\ U''(t) &= -An \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left[-(n-1) \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \cos^{n-2} \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) \times \sin^2 \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) + \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \cos^n \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

由最后一个表示式可以看出，当 $t = -\frac{\tau_1}{2}$ 时，值 $U''(t) \neq 0$ ，因此，当 $n > 2$ 时，按 n 次余弦规律所进行的圆化和余弦-平方律圆化比较起来，并没有增大频谱的减低速度。因此，我们需要寻求一个附加于 $U(t)$ 上的函数 $\varphi(t)$ ，要此 $\varphi(t)$ 能消除 $U''(t)$ 在 $-\frac{\tau_1}{2}$ 处的跃变，且不会在 $-\frac{\tau}{2}$ 点形成跃变。为了构成信号，我们所得到的函数将具有

$$U_n(t) = A \left[\cos^n \frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) + \varphi(t) \right] \quad (5.14)$$

$$\text{当 } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq -\frac{\tau_1}{2}$$

的形式。

我們求出的 $\varphi(t)$ 的形式为

$$\varphi(t) = B \left(t + \frac{\tau}{2} \right)^n \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right)^2 \quad \text{当 } n \geq 3, \quad (5.15)$$

式中 $B = \text{常数}$ ，它在下面将由使 $U'''(t)$ 在 $t = -\frac{\tau_1}{2}$ 点处的跃变得以消除的条件来决定。

由 (5.15) 式可以看出，当 $t = -\frac{\tau}{2}$ 与 $t = -\frac{\tau_1}{2}$ 时， $\varphi(t) = 0$ 。

我們求出

$$\varphi'(t) = nB \left(t + \frac{\tau}{2} \right)^{n-1} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right)^2 + 2B \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) \left(t + \frac{\tau}{2} \right)^n, \quad (5.16)$$

和

$$\begin{aligned} \varphi''(t) = & n(n-1)B \left(t + \frac{\tau}{2} \right)^{n-2} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right)^2 + \\ & + 4nB \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) \left(t + \frac{\tau}{2} \right)^{n-1} + 2B \left(t + \frac{\tau}{2} \right)^n. \end{aligned} \quad (5.17)$$

由 (5.16) 和 (5.17) 可以看出

$$\left. \begin{aligned} \varphi' \left(-\frac{\tau}{2} \right) &= \varphi' \left(-\frac{\tau_1}{2} \right) = 0 \\ \varphi'' \left(-\frac{\tau}{2} \right) &= 0 \\ \varphi'' \left(-\frac{\tau_1}{2} \right) &= 2B \left(\frac{\tau - \tau_1}{2} \right)^n \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

为了消除 $U''_n \left(-\frac{\tau_1}{2} \right)$ 中的跃变，假定

$$U''_n \left(-\frac{\tau_1}{2} \right) = U'' \left(-\frac{\tau_1}{2} \right) + \varphi'' \left(-\frac{\tau_1}{2} \right) = 0. \quad (5.19)$$

因为从 (5.13) 应当有

$$U''\left(-\frac{\tau_1}{2}\right) = -\frac{An\pi^2}{(\tau-\tau_1)^2},$$

那末, (5.19) 具有

$$U''_n\left(-\frac{\tau_1}{2}\right) = \frac{-An\pi^2}{(\tau-\tau_1)^2} + 2B\left(\frac{\tau-\tau_1}{2}\right)^n = 0 \quad (5.20)$$

的形式。

由 (5.20) 决定

$$B = \frac{n2^{n-1}A\pi^2}{(\tau-\tau_1)^{n+2}}.$$

此时, (5.14) 具有

$$\begin{aligned} U_n(t) &= U(t) + \varphi(t) \\ &= A \left[\cos^n \frac{\pi}{\tau-\tau_1} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) + \frac{2^{n-1}n\pi^2}{(\tau-\tau_1)^{n+2}} \left(t + \frac{\tau}{2} \right)^n \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right)^2 \right], \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau_1}{2}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

的形式。

用类似的方法得到

$$\begin{aligned} U_n(t) &= A \left[\cos^n \frac{\pi}{\tau-\tau_1} \left(t - \frac{\tau_1}{2} \right) + (-1)^n \frac{2^{n-1}n\pi^2}{(\tau-\tau_1)^{n+2}} \right. \\ &\quad \left. \left(t - \frac{\tau}{2} \right)^n \left(t - \frac{\tau_1}{2} \right)^2 \right], \quad \frac{\tau_1}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

当 $n=3$ 时, 这种信号的频谱密度为

$$f(\omega) = \frac{A\tau}{2} \cdot 4 [r \cos(k-\varphi) + r_1 \cos(\xi k - \varphi_1)], \quad (5.23)$$

式中

$$r = \sqrt{p^2 + q^2};$$

$$\cos \varphi = \frac{p}{r};$$

$$r_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2};$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{p_1}{r_1};$$

$$\xi = \frac{\tau_1}{\tau};$$

$$d = \frac{\pi}{1-\xi};$$

$$p = 3 d^3 \left(\frac{2}{(4k^2 - 9d^2)(4k^2 - d^2)} + \frac{3\pi^2 k^2 - 60d^2}{8\pi^3 k^6} \right);$$

$$q = -\frac{9d^4}{\pi^2 k^6};$$

$$p_1 = \frac{9d^3(20d^2 - 3\pi^2 k^2)}{8\pi^3 k^6};$$

$$q_1 = -\frac{3d^4}{2k^8} \left(\frac{28k^2 - 9d^2}{4(4k^2 - 9d^2)(4k^2 - d^2)} + \frac{9}{\pi^2 k^2} \right).$$

当 $k=0$ 时, 公式 (5.23) 具有

$$f(0) = \frac{A\tau}{2} \cdot 4 \left[\frac{2(1-\xi)}{3\pi} + \frac{\xi}{2} - \frac{\pi^2}{320}(1-\xi) \right] \quad (5.24)$$

的形式。

(5.24) 式中方括号内前两项对应于边缘按余弦-立方律圆化而中间部分为矩形的脉冲。第三项是由于脉冲的“附加项”所引起的。

因为当 k 增加时, q 和 q_1 与 $\frac{1}{k^6}$ 成比例地减低, 由方程 (5.23) 所表示的频谱的减低速度与 p 和 p_1 有关。由 p 与 p_1 的表示式中可以看出, 这些量与 $\frac{1}{k^4}$ 成比例地减低; 于是, 由方程 (5.21) 和 (5.22) 所确定的函数 $U(t)$, 可保证频谱的减低速度不慢于 $\frac{C}{k^4}$ 。

类似地, 为了获得大于 $\frac{C}{k^4}$ 的减低速度, 可以求出表示式 (5.14) 中的 $\varphi(t)$ 具有

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \left(t + \frac{\tau}{2} \right)^n \left[B \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right)^2 + B_1 \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right)^6 + \right. \\ & \left. + \dots + B_{n-3} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right)^{n-1} \right], \end{aligned} \quad (5.25)$$

的形式。式中 $B, B_1, B_2, \dots, B_{n-3}$ 为常数, 它们由下列条件来确定, 即使得

$$U_n(t) = A \left[\cos^n \frac{\pi t}{\tau - \tau_1} \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) + \varphi(t) \right]$$

及其 $(n-1)$ 阶以下的导数在区间 $\left[-\frac{\tau}{2}, -\frac{\tau_1}{2}\right]$ 及 $\left[\frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau}{2}\right]$ 中没有跃变。

由此, 当 $-\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau_1}{2}$ 及 $n=4$ 时

$$U_4(t) = A \left\{ \cos^4 \left[\frac{\pi}{1-\xi} \left(t + \frac{\xi}{2} \right) \right] + \frac{32\pi^2 (t+0.5)^4 \left(t + \frac{\xi}{2} \right)^2}{(1-\xi)^6} \left[1 - \frac{8 \left(t + \frac{\xi}{2} \right)}{1-\xi} \right] \right\}; \quad (5.26)$$

而当 $n=5$ 时

$$U_5(t) = A \left\{ \cos^5 \left[\frac{\pi}{1-\xi} \left(t + \frac{\xi}{2} \right) \right] + \frac{80\pi^2 (t+0.5)^5 \left(t + \frac{\xi}{2} \right)^2}{(1-\xi)^7} \left[1 - \frac{10 \left(t + \frac{\xi}{2} \right)}{1-\xi} + \frac{\left(60 - \frac{\pi^2}{4} \right) \left(t + \frac{\xi}{2} \right)^2}{(1-\xi)^2} \right] \right\}. \quad (5.27)$$

在图 5.3 上表示出按公式 (5.21), (5.26) 和 (5.27) 计算出来的 $U_3(t)$, $U_4(t)$ 与 $U_5(t)$ 的图形。

为了评价方便起见, 将二至五章中所得到的确定频带宽度、建立时间、判据 k_y 和频带减低速度的结果列在表 5.1 中。在这个表中, 频带的宽度表示为单位 $k = \frac{\omega t}{2}$ 与单位 B , 此处 B 为键控速度的波特数。为了从单位 k 转换至单位 B , 频带宽度的数值已除以 $\frac{\pi}{2}$ 。

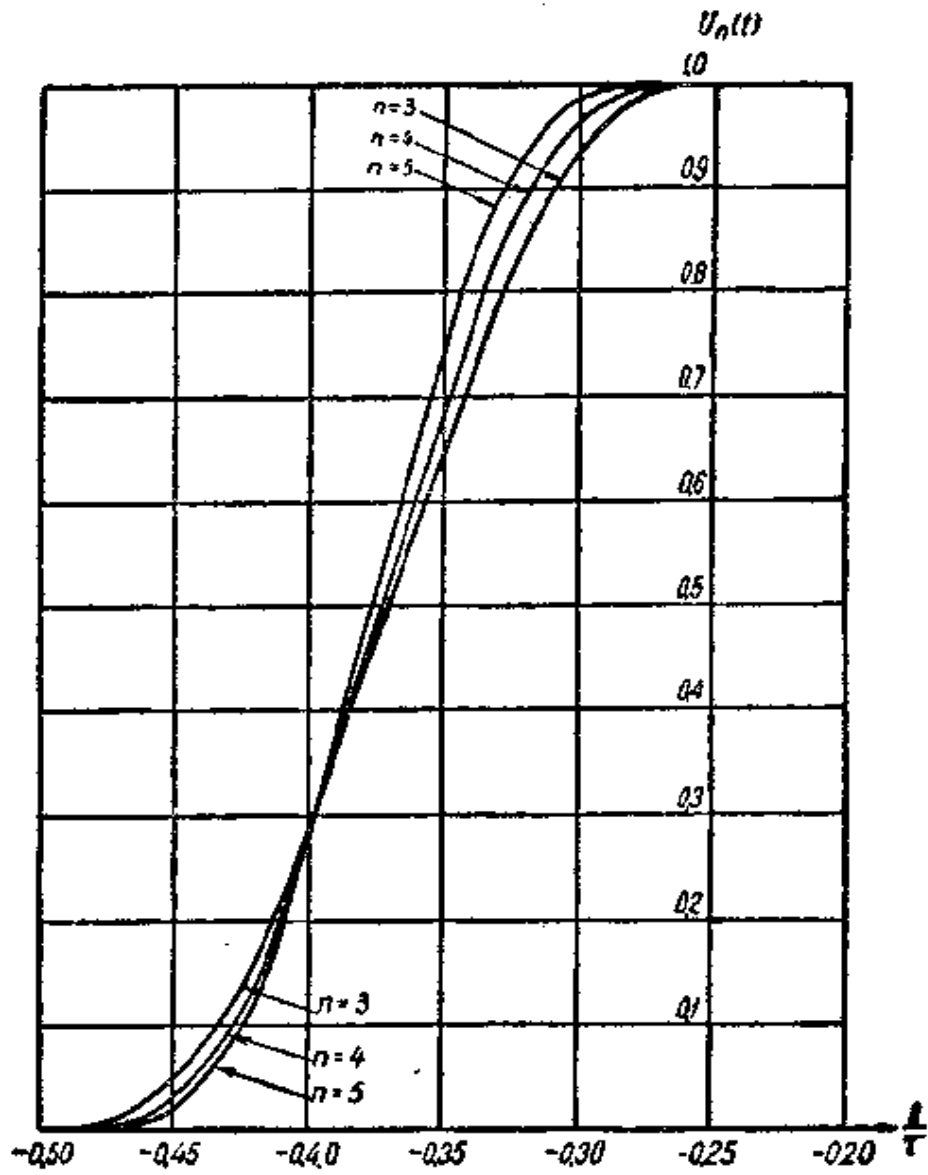


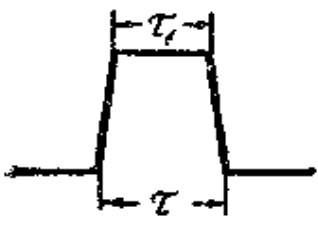
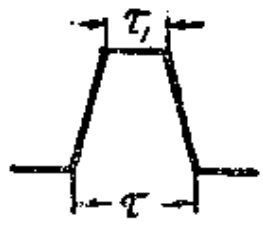


图 5.3 带有矩形部分且频谱减低不比 $\frac{C}{\omega^{n+1}}$ 慢的信号形状

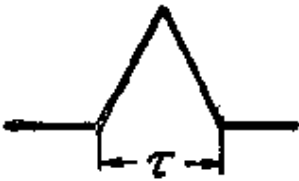


将这些主要指标加以比较，就能够从不同的观点来评价所讨论过的一些脉冲的形状。

各种不同形状脉冲的比较

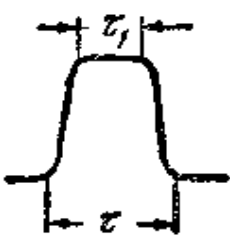
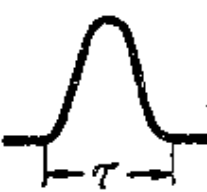

表 5.1

编 号	脉 冲 形 状	频带宽度		建立 时间	脉冲品质 判据	频谱减 低速度
		单	位			
			B	$\frac{\tau_s}{\tau}$	$k_y = \frac{\tau_y}{\tau} k$	$\frac{1}{k^{n+1}}$
1	“理想”脉冲 	3.6	2.3	0.365	1.31	$\frac{1}{k}$
2	矩形脉冲 	32	20.6	0.000	0.00	$\frac{1}{k}$
3	$\xi = 0.8$ 梯形脉冲 	10.2	6.5	0.080	0.82	$\frac{1}{k^2}$
4	$\xi = 0.5$ 	6.2	3.9	0.200	1.24	$\frac{1}{k^2}$

(續表)

編 号	脉 冲 形 状	頻带宽度		建立 時間	脉冲品质 判据	頻譜減 低速度
		单	位			
		k	B	$\frac{\tau_y}{\tau}$	$k_p = \frac{\tau_y}{\tau} k$	$\frac{1}{k^{n+1}}$
5	<p>$\xi = 0.0$</p> <p>三角形脉冲</p> 	4.1	2.6	0.400	1.64	$\frac{1}{k^2}$
6	<p>余弦形脉冲(不带有矩形部分)</p> 	4.0	2.5	0.324	1.25	$\frac{1}{k^2}$
7	<p>$\xi = 0.8$</p> <p>具有余弦-平方律圆化的脉冲</p> 	12.0	7.7	0.059	0.707	$\frac{1}{k^3}$

(續表)

編 号	脉 冲 形 状	頻带宽度		建立 時間	脉冲品质 系数	頻譜減 低速度
		单 位				
		k	B	$\frac{\tau_y}{\tau}$	$k_y = \frac{\tau_y}{\tau} k$	$\frac{1}{k^{n+1}}$
8	$\xi = 0.5$ 	6.9	4.4	0.147	1.015	$\frac{1}{k^3}$
9	$\xi = 0.0$ 余弦-平方形脉冲 	4.4	2.8	0.294	1.30	$\frac{1}{k^3}$
10	余弦-立方形脉冲(不带有矩形部分) 	5.2	3.3	0.263	1.40	$\frac{1}{k^4}$

第六章 振幅鍵控与頻率鍵控时，傳輸 無線电报信号占用的頻帶

本章叙述在振幅鍵控与頻率鍵控下，計算傳輸無線电报信号所占用的頻帶寬度的方法。分析是以周期信号頻譜为基础的（“电报的观点”）。

文中指出，即使采用最简单的形成电路，在振幅鍵控下，可以将傳輸頻帶寬度降低至原来的若干分之一。确定出矩形与圆化了的信号在頻率-鍵控傳輸时的頻帶寬度。計算結果与利用經驗公式所獲得的結果进行了比較。

确定出振幅鍵控与頻率鍵控下，傳輸矩形信号所占用的頻帶寬度之間的数值关系；并且指出：如果頻率鍵控的指标 $m < 16$ ，則用頻率鍵控傳輸占用的頻帶比振幅鍵控小；反之，如果 $m > 16$ ，則振幅鍵控傳輸能够較好地利用頻帶。

§ 6.1. 振幅鍵控时傳輸占用的頻帶寬度

假定相应于低頻信号且具有周期 $T_p = \frac{2\pi}{p}$ 的周期函数以級数

$$\begin{aligned} f_1(t) &= a_0 + a_1 \cos(pt - \varphi_1) + a_2 \cos(2pt - \varphi_2) + \\ &+ \dots + a_n \cos(np t - \varphi_n) + \dots = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(np t - \varphi_n). \end{aligned} \quad (6.1)$$

表示。

現在来求函数在周期 T_p 中的均方值，亦即

$$\overline{[f_1(t)]^2} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [f_1(t)]^2 dt. \quad (6.2)$$

級数 (6.1) 的系数滿足方程式

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f_1(t) dt \\ a_n \cos \varphi_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} f_1(t) \cos npt dt \\ b_n \sin \varphi_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} f_1(t) \sin npt dt \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

可以写出

$$\frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [f_1(t)]^2 dt = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f_1(t) \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \varphi_n \cos npt + a_n \sin \varphi_n \sin npt] \right\} dt, \quad (6.4)$$

由 (6.4) 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [f_1(t)]^2 dt &= a_0 \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f_1(t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \varphi_n \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f_1(t) \cos npt dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \varphi_n \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f_1(t) \sin npt dt. \end{aligned} \quad (6.5)$$

或者按照 (6.3), 可以将低频信号表示成

$$\frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [f(t)]^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad (6.6)$$

的形式。

其次, 假定给出振幅-键控信号。传输高频信号所占用的频带宽度, 可以从与低频信号相对应的情况的研究中获得。

高频振幅-键控信号可以表示成

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) \sin(\omega t + \psi) = [a_0 + a_1 \cos(pt - \varphi_1) + \dots \\ &+ a_n \cos(npt - \varphi_n) + \dots] \sin(\omega t + \psi), \end{aligned} \quad (6.7)$$

的形式, 此处角频率 ω 代表载频, 而方括号中的级数表示低频信号。

表示式 (6.7) 可以改写为

$$f(t) = a_0 \sin(\omega t + \psi) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos[(\omega - np)t + \psi - \varphi_n] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos[(\omega + np)t + \psi + \varphi_n] \quad (6.8)$$

的形状。

按照方程 (6.2), 高频信号可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt &= \frac{1}{2} a_0^2 + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

的形式, 式中 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为高频的周期。

将方程 (6.6) 与 (6.9) 相比较, 可以看出, 除了 (6.9) 式中包含有因子 $\frac{1}{2}$ 以外, 在高频信号中的能量分布与低频信号是一样的。由于这个缘故, 今后将只讨论低频信号的频谱。

矩形信号 信号的形状表示在图 6.1 中。

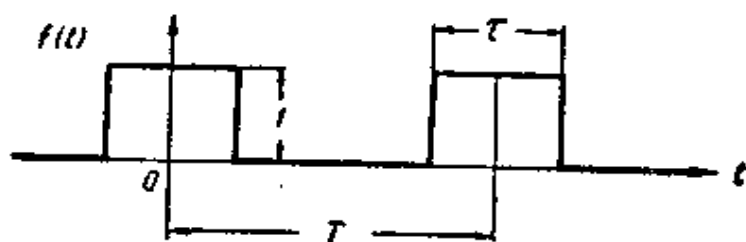


图 6.1 矩形信号

当采用矩形信号键控时, 有

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{当 } \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (6.10)$$

将相应于低频信号的表示式 (6.10) 展开为傅里叶级数, 得出

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin pt + \frac{1}{3} \sin 3pt + \frac{1}{5} \sin 5pt + \dots + \frac{1}{2n-1} \sin (2n-1)pt + \dots \right]. \quad (6.11)$$

考虑到公式(6.11), 相应于传输频带中的部分功率将等于:

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{n_1^2} \right) \geq \frac{1}{2} \times 0.99. \quad (6.12)$$

由公式(6.12)中求出 $n_1 = 21$ 。

如果用 B 表示以波特数计的键控速度, 那末, 传输所占用的频带宽度将等于:

$$\Delta f_c = 21 B.$$

圆化的信号 我们来研究图 6.2 所示的信号, 它可用函数

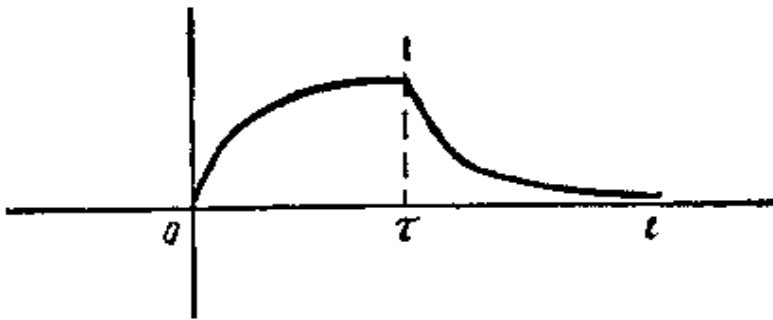


图 6.2 圆化的信号

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{在 } t = -\infty \text{ 至 } t = 0 \text{ 的范围内} \\ 1 - e^{-\frac{t}{\theta}} & \text{在 } t = 0 \text{ 至 } t = \tau \text{ 的范围内} \\ (1 - e^{-\frac{\tau}{\theta}}) e^{-\frac{t-\tau}{\theta}} & \text{在 } t = \tau \text{ 至 } t = +\infty \text{ 的范围内} \end{cases}. \quad (6.13)$$

表示。

利用由电阻 R 与电容 C 所组成的最简单形成电路 (图 6.3), 就可以得到这种形状的信号。

确定信号圆化程度的电路时间常数为：

$$\theta = RC. \quad (6.14)$$

在实际条件下， θ 选择得比信号的持续時間小很多，使比值 $\frac{\theta}{\tau}$ 約为 $\frac{1}{5} \sim \frac{1}{40}$ 。

假定把用級数 (6.11) 所表示的矩形形状的周期性电压加在电路 (图 6.3) 的端子 1、2 上，而从該电路的端子 1'、2' 上取得圆化了的电压。在电路輸出端上周期信号的形状与图 6.2 上所示的形状接近，但是为了表示得明显起見，图 6.2 上所示的形状有些夸张。实际上，在大多数情况下，信号具有緩和得多的圆化。

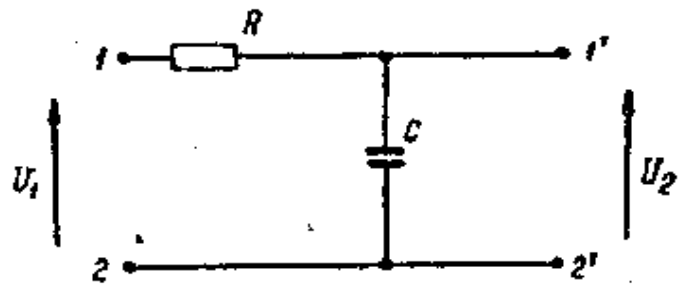


图 6.3 圆化形信号的形成电路

现在来确定在键控频率周期 T 中的功率平均值。如果 $\frac{\theta}{\tau}$ 足够小，則

$$p = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\tau} \left\{ \int_0^\tau (1 - e^{-\frac{t}{\theta}})^2 dt + \int_\tau^\infty (1 - e^{-\frac{t}{\theta}})^2 e^{-2\frac{t-\tau}{\theta}} dt \right\}. \quad (6.15)$$

积分后得到

$$p = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\theta}{\tau} (1 - e^{-\frac{\tau}{\theta}}) \right]. \quad (6.16)$$

现在来看电路 (图 6.3) 輸出电压与輸入电压之間的关系。在稳定状态下，这个关系可用方程

$$\left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 \theta^2} \quad (6.17)$$

来表示。

如果 $\omega = n p$, 此处

$$p = \frac{2\pi v}{T} = \frac{\pi v}{\tau} \quad (6.18)$$

是键控的基本角频率, 则

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = \frac{1}{1 + n^2 p^2 \theta^2}. \quad (6.19)$$

如果在形成电路输入端上加进矩形信号(6.10), 那末, 在电路的输出端上将电压

$$\begin{aligned} u_2(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 1^2 \cdot p^2 \cdot \theta^2}} \sin pt + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 + 3^2 \cdot p^2 \cdot \theta^2}} \sin 3pt + \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{1 + 5^2 \cdot p^2 \cdot \theta^2}} \sin 5pt + \right. \\ \left. + \dots \right]. \quad (6.20) \end{aligned}$$

在这种情形下, 电压各个分量之间的相位关系是无关系要的。这个电压的均方值确定出功率

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 p^2 \theta^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (6.21)^{\text{①}} \end{aligned}$$

如果取 $\frac{\theta}{v} = \frac{1}{20}$, 那末由公式(6.16)得出

$$P = \frac{19}{40}. \quad (6.22)$$

按公式(6.21)所计算出来的传输频带中的功率, 等于由公式(6.16)所确定出来的总功率的99%, 亦即

① (6.21)中的 n 只能取正奇数——译者。

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1+n^2 p^2 \theta^2} = \frac{19}{40} \cdot 0.99 = 0.470. \quad (6.23)$$

由等式 (6.23) 看出, 为了确定包含 99% 的功率的频带, 必须计入 1、3 与 5 次谐波, 亦即频带的宽度将等于

$$\Delta f = 5 B. \quad (6.24)$$

对其他 $\frac{\theta}{\tau}$ 值进行类似的计算后, 得到下列传输所占用的频带宽度值:

$$\begin{aligned} \text{当} \quad \frac{\theta}{\tau} = \frac{1}{4.6} \quad \Delta f &= 3 B, \\ \frac{\theta}{\tau} = \frac{1}{40} \quad \Delta f &= 7 B. \end{aligned}$$

计算表明, 即使采用最简单的形成电路, 也可以将传输时的频带宽度减低为原来若干分之一。为了实用起见, 通常采用形式较为复杂一些的形成电路。利用这些电路所得到的传输频带宽度, 可以在各个个别情况下用类似的方法去确定。

§ 6.2. 频率键控时传输占用的频带宽度

矩形信号 由[文献 2]中可以知道, 当用矩形点子作无相位间断的键控时, 可以将信号表达为下列形式:

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{m}{m^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} m\right) \cos \omega t + \right. \\ + \frac{m}{m^2 - 1^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} m\right) [\cos(\omega - p)t - \cos(\omega + p)t] - \\ - \frac{m}{m^2 - 2^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} m\right) [\cos(\omega - 2p)t + \cos(\omega + 2p)t] - \\ - \frac{m}{m^2 - 3^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} m\right) [\cos(\omega - 3p)t - \cos(\omega + 3p)t] + \\ \left. + \dots \right\}, \quad (6.25) \end{aligned}$$

式中

p ——鍵控頻率，

$m = \frac{2D}{B}$ ——頻率調制指數，

D ——頻率偏差（工作頻率間之差的一半）。

当 m 为整数值时，可以将公式 (6.25) 写成比較緊湊的形式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{m}{n^2 - m^2} \sin(n+m) \frac{\pi}{2} \cos \left[(\omega + np)t + (n+m) \frac{\pi}{2} \right], \quad (6.26)$$

根据公式 (6.26)，頻譜的 n 次分量的振幅为：

$$A_n = A_{-n} = \frac{2m}{\pi} \left| \frac{\sin(n+m) \frac{\pi}{2}}{n^2 - m^2} \right|. \quad (6.27)$$

現在来确定在鍵控頻率周期中的功率平均值。如果 m 为整数或整数之半，那末

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \cos^2 2\pi D t dt + \int_{\frac{T}{2}}^T \cos^2(-2\pi D) t dt \right] = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos^2 2\pi D t dt = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

另一方面

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2m}{\pi} \frac{\sin(n+m) \frac{\pi}{2}}{n^2 - m^2} \right]^2 = \\ &= \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{m^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2} + 2m^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin(n+m) \frac{\pi}{2}}{n^2 - m^2} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

由公式 (6.28) 与 (6.29), 得出传输频带中的功率为

$$\frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{m^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2} + 2m^2 \sum_{n=1}^{n_1} \left[\frac{\sin(n+m)\frac{\pi}{2}}{n^2-m^2} \right]^2 \right\} = 0.99. \quad (6.30)$$

由表达式 (6.30) 可以找出使该式得到满足的频谱的 n_1 次分量, 也就是说, 可以确定出包含有 99% 的信号功率的频带中最后一个分量的次数。

为了确定相等的矩形频率-键控的信号序列在传输时所占用的频带宽度, 常用下列公式[文献 40]:

$$\Delta f = \begin{cases} 2.6D + 1.4B & \text{对 } 2 \leq m \leq 8 \text{ 的准确度达 } 2\% \\ 2.2D + 3.1B & \text{对 } 8 \leq m \leq 20 \text{ 的准确度达 } 2\% \end{cases}. \quad (6.31)$$

公式 (6.31) 也能很方便地以其他形式表示, 如将频带宽度通过频率调制指数表示为键控速度 B 的单位, 即得

$$\Delta f = \begin{cases} (1.3m + 1.4)B & \text{对 } 2 \leq m \leq 8 \text{ 的准确度达 } 2\% \\ (1.1m + 3.1)B & \text{对 } 8 \leq m \leq 20 \text{ 的准确度达 } 2\% \end{cases}. \quad (6.32)$$

圆化形信号 下面来讨论单一频率的频率键控情形, 这种情形相当于形成信号时, 可能得到的最大圆化。函数

$$f(t) = \sin(\omega t + \varphi_0 + m \sin pt) \quad (6.33)$$

以差一振幅常系数的准确度与该种传输相当, 式中 t 为时间, ω 、 φ_0 、 p 与 m 为常数, 它们可取任一正实数值。

如所周知, 函数 (6.33) 可以展开成正弦时间函数的收敛级数, 亦即可以表达为无穷的离散频谱的形式:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m) \sin[(\omega + np)t + \varphi_0], \quad (6.34)$$

式中 n 为整数, $J_n(m)$ 表示变数为 m 的 n 阶第一类贝塞尔函数。

于是, 对应于每一种频率的平均功率等于振幅 $J_n(m)$ 的平方 (其准确度只差一与 n 无关的常值系数); 对应于级数 (6.34) 的总功率, 能在准确度同样只差一常值振幅系数下, 用公式

$$J_0^2(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(m) \quad (6.35)$$

来表示, 这是由于

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m).$$

在任意的 m 值下, 级数 (6.35) 是收敛的, 且级数的和与 m 无关, 而具有极简单的形式[文献 15, 第 40 页],

$$J_0^2(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(m) = 1. \quad (6.36)$$

通常认为, 离散频率所具有的功率, 不低于传输所占用频带中所包含辐射总功率的 0.25%。因此, 最小的整数 n (正数或零), 确定着传输所占用频带的宽度, n 值满足下列两个条件:

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} J_p^2(m) \leq 0.005, \quad (6.37)$$

$$J_{n+q}^2(m) \leq 25 \cdot 10^{-4} \text{ 或 } |J_{n+q}(m)| < 0.05. \quad (6.38)$$

式中

q ——任意正整数。

由于 q 是任意正数, 表达式(6.38)中包含着无穷多个条件。因此, 我们用两个条件来代替它, 这两个条件就不再含有这种不确定性了。

由[文献 13]可知, 任何一个函数 $J_n(m)$ (其中 m 为任意常数; n 为变数) 当 $n = n_1$ 时达到它的最大振幅 (当完成了若干次振荡以后^①, 它们的振幅与伪周期增加); 这个最大振幅是正的, 并且 $n_1 < m$ 。对 n_1 可正确地写出近似等式

$$n_1 \approx m - 0.8086 m^{\frac{1}{3}}. \quad (6.39)$$

其次, 这个始终为正值函数随着 n 的增加而减小, 并且迅速地趋于零。

最大振幅随着 m 的增大而按关系式

① 这种振荡的数目随着 m 的增加而增大。

$$J_{n_1}(m) \approx 0.6749 \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}} \quad (6.40)$$

减小。

这样, 如果 $J_{n+1} < 0.05$, 则对 $n+1 \geq n_1$ 更有 $J_{n+q}(m) < 0.05$ 。于是 (6.38) 可以写成两个不等式:

$$n+1 \geq n_1; \quad J_{n+1}(m) < 0.05. \quad (6.41)$$

此外, 如果 $J_{n_1}(m) < 0.05$, 则我们可以看出, (6.41) 的两个条件均丧失了原来的意义, 因为对于任意整数 n , 有 $|J_n(m)| < 0.05$ 。

由方程 (6.40) 可以得出, 在 $m \geq 2460$ 的情况下, 两个条件均丧失了原来的意义。自然, 此时条件 (6.37) 仍然有效。

我们首先看不等式 (6.41)。对于 $0 \leq m \leq 29$, 表格 [文献 14] 上直接给出了 m 为整数值的解。

为了解出不等式 (6.37), 首先将该式左边部分的每一项表示为诺伊曼 (Нейман) 级数的形式 [文献 15, 第 43 页],

$$J_p^2(m) = \left(\frac{m^2}{4}\right)^p \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(2p+q)! \left(-\frac{m^2}{4}\right)^q}{q!(2p+q)! [(p+q)!]^2}. \quad (6.42)$$

这样, 我们可将 (6.37) 的左边部分表示为绝对收敛的正项级数形式。其次, 可以将包含有 m 同一次幂的项组合在一起。这样组合的结果得到

$$\begin{aligned} \sum_{p=n+1}^{\infty} J_p^2(m) &= \left(\frac{m^2}{4}\right)^{n+1} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(2n+2q+1)! \left(-\frac{m^2}{4}\right)^q}{q!(2n+q+1)! [(n+q+1)!]^2} \\ &= \frac{\left(\frac{m^2}{4}\right)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \left\{ 1 - \frac{2n+3}{(n+2)^2} \frac{m^2}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2n+4)(2n+5)}{2[(n+2)(n+3)]^2} \left(\frac{m^2}{4}\right)^2 - \dots \right\}. \quad (6.43) \end{aligned}$$

上面这个表示式是指标 $n=1$ 的递减函数，且当 n 增加时趋于零。

仅当 $m=0$ 至 $m=4$ 时，交错级数 (6.43) 用起来才方便。由于级数收敛得慢，当 m 值很大时，利用它有困难。

为了解出不等式 (6.37)，我们随 m 值的不同而作下列处理：

- 1) 当 $0 \leq m \leq 4$ ，利用交错级数 (6.43)；
- 2) 当 $5 \leq m \leq 29$ ，利用 [文献 14] 中的表格。

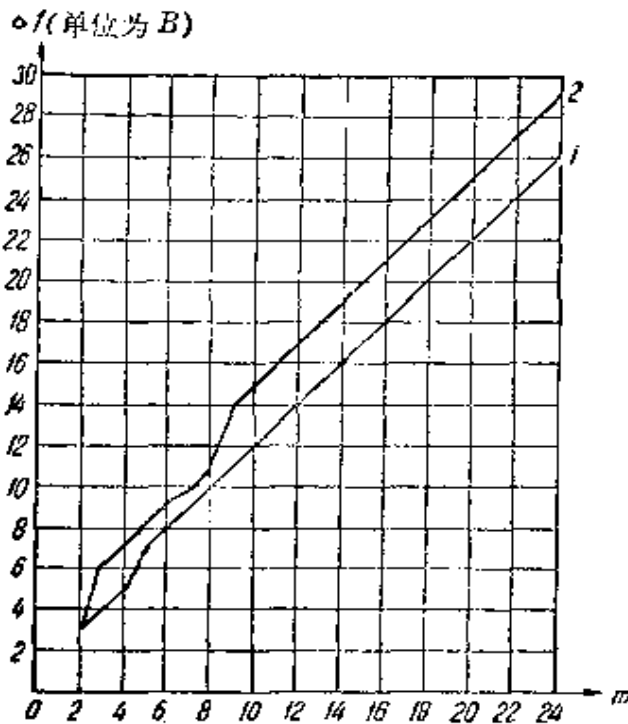


图 6.4 频率键控时，正弦形 (1) 与矩形 (2) 周期信号幅射占用的频带宽度

号。

最后，只剩下同时估计不等式 (6.37) 与 (6.41) 的问题。对于小的 m 值，条件 (6.41) 比 (6.37) 局限性大一些。对于大的 m 值，由条件 (6.37) 确定 n 。

因此，我们确定了以矩形信号与圆化形信号来传输频率-键控信号所占用的频带宽度。在图 6.4 中将两种计算结果进行了比较；曲线 1 相应于正弦形信号，曲线 2 相应于矩形信号。

§ 6.3. 两种键控形式下占用频带的比较

利用前面所进行的计算，可以建立振幅键控与频率键控下、传输所占用频带宽度之间的数值关系。对矩形信号进行这种比较是最简单的。由 § 6.1 中的计算可以看出当振幅键控时，传输所占用的频带宽度为 $\Delta f_a = 21 B$ 。由图 6.4 上的曲线 2 可知，这种频带宽度

相应于频率键控时调制指数 $m=16$ 。

在这种临界调制指数下，每种情况下占用的频带宽度值是彼此相等的。当 $m < 16$ 时，采用频率键控传输所占用的频带比振幅键控时窄；反之，当 $m > 16$ 时，采用振幅键控传输能较好地利用频带。

在无线电通信中， $D=500$ 赫的频率键控获得广泛使用。当 $m=16$ 时

$$B = \frac{2 \times 500}{16} = 62.5 \text{ 波特.}$$

于是，当 $D=500$ 赫时，在速度超过 62.5 波特的情况下，从占用频带的观点来看，频率键控比振幅键控优越一些。

同样可以对其他脉冲形状进行比较。当脉冲圆化时，调制指数的临界值 m 减低，且在较小的调制指数下，亦即当工作速度大于利用矩形脉冲时的速度下，频率键控在占用频带方面比振幅键控优越。

第七章 频率键控时各种不同形状 无线电报信号的频谱

本章计算频谱，确定出下列两种形状调制脉冲下频率调制信号所占用的频带宽度；按线性规律建立的脉冲（梯形脉冲）与按正弦规律建立的脉冲。在推导计算公式时，采用了与[文献 13]和[文献 21]中相同的方法。

讨论了各种不同调制脉冲形状下频率-调制信号的带外辐射，并且指出在高频下形状最典型的频率-键控信号的频谱分量与键控函数的频谱分量成正比例，与分量的号数成反比例。

文中指出，尽管所讨论的脉冲的两种形状在占用频带方面来说实际上是等价的，然而宁愿采用按正弦规律建立的脉冲，因为它的带外辐射衰减得较快。

§ 7.1. 梯形脉冲

在[文献 13]中得出了梯形与正弦律圆化键控脉冲情况下，频率-键控信号的频谱的纯粹实验研究结果。

下面来讨论频率-键控的梯形脉冲：

$$f(t) = \sin [\omega t + \varphi(t)], \quad (7.1)$$

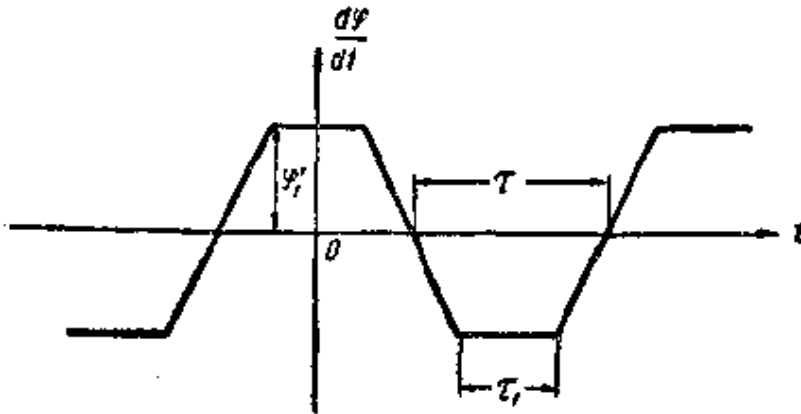


图 7.1 梯形脉冲的频率键控

其 $\frac{d\varphi}{dt}$ 由图 7.1 中 ($\varphi(0) = 0$) 所表示的梯形折线来确定。

将相应于周期 2τ 的脉冲重复频率用 Ω 来表示，频率调制指数 $m = \frac{\varphi'_1}{\Omega}$ 与 $\xi = \frac{\tau_1}{\tau}$ 。符号 τ, τ_1 与 φ'_1 的意义表示在图 7.1 上。

由于在一般情况下， ω 与 Ω 不存在着有理的关系，那末， $f(t)$ 就不能表示为傅里叶级数的形式。然而，我们可以将此函数表示为

$$f(t) = \sin \omega t \cos \varphi(t) + \cos \omega t \sin \varphi(t) \quad (7.2)$$

的形式，式中 $\varphi(t)$ 与 $\frac{d\varphi}{dt}$ 为周期函数，它们的周期为 2τ 。此时 $\cos \varphi(t)$ 与 $\sin \varphi(t)$ 可以展开成周期为 2τ 的傅里叶级数。

函数 $\frac{d\varphi}{dt}$ 为 t 的偶函数，因此 $\varphi(t)$ 为 t 的奇函数； $\cos \varphi(t)$ 为 t 的偶函数，而 $\sin \varphi(t)$ 为 t 的奇函数。 $\cos \varphi(t)$ 与 $\sin \varphi(t)$ 的傅里叶展开式的形式为

$$\begin{aligned}\cos \varphi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi \frac{t}{\tau} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t,\end{aligned}\quad (7.3)$$

$$\begin{aligned}\sin \varphi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi \frac{t}{\tau} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t,\end{aligned}\quad (7.4)$$

式中 a_n 与 b_n 为傅里叶系数, 由于 φ 相对于 $t=0$ 点的对称性, 这些系数可以表示成

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \cos n\Omega t \cos \varphi(t) dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \{ \cos [\varphi(t) - n\Omega t] + \cos [\varphi(t) + n\Omega t] \} dt,\end{aligned}\quad (7.5)$$

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \sin n\Omega t \sin \varphi(t) dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \{ \cos [\varphi(t) - n\Omega t] - \cos [\varphi(t) + n\Omega t] \} dt,\end{aligned}\quad (7.6)$$

的形式。

将 (7.3) 与 (7.4) 代入 (7.2) 中, 得到

$$\begin{aligned}2f(t) &= a_0 \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n [\sin (\omega + n\Omega)t + \\ &+ \sin (\omega - n\Omega)t] + b_n [\sin (\omega + n\Omega)t - \sin (\omega - n\Omega)t] \} = \\ &= a_0 \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + b_n) \sin (\omega + n\Omega)t + (a_n - b_n) \sin (\omega - n\Omega)t].\end{aligned}\quad (7.7)$$

令

$$\frac{a_0}{2} = C_0; \quad \frac{a_n + b_n}{2} = C_n,\quad (7.8)$$

则可将 (7.7) 写为比较紧凑的形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \sin(\omega + n\Omega)t, \quad (7.9)$$

式中

$$C_n = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos[\varphi(t) - n\Omega t] dt. \quad (7.10)$$

函数 $\varphi(t)$ 在区间 $(0, \tau)$ 中的展开式在三个不同的区间

$$\left(0, \frac{\tau_1}{2}\right), \left(\frac{\tau_1}{2}, \frac{2\tau - \tau_1}{2}\right), \left(\frac{2\tau - \tau_1}{2}, \tau\right)$$

上将是不同的。

函数 $\frac{d\varphi}{dt}$ 根据图 7.1 上所示的调制信号的形状而变化, 亦即

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left\{ \begin{array}{ll} m\Omega & \text{当 } 0 \leq t \leq \frac{\tau_1}{2} \\ \frac{m\Omega}{\tau - \tau_1} (\tau - 2t) & \text{当 } \frac{\tau_1}{2} \leq t \leq \frac{2\tau - \tau_1}{2} \\ -m\Omega & \text{当 } \frac{2\tau - \tau_1}{2} \leq t \leq \tau \end{array} \right\}. \quad (7.11)$$

$\frac{d\varphi}{dt}$ 在由 τ 至 2τ 的第二个半周期中的变化将用类似的表示式

来描述。

相角的周期分量 φ 由下列表示式来确定:

$$\varphi(t) = \left\{ \begin{array}{ll} m\Omega t & \text{当 } 0 \leq t \leq \frac{\tau_1}{2} \\ \frac{m\Omega}{4(\tau - \tau_1)} [4t(\tau - t) - \tau_1^2] & \text{当 } \frac{\tau_1}{2} \leq t \leq \frac{2\tau - \tau_1}{2} \\ m\Omega(\tau - t) & \text{当 } \frac{2\tau - \tau_1}{2} \leq t \leq \tau \end{array} \right\} \quad (7.12)$$

对第二个半周期也得到类似的表示式。因此, 根据表示式 (7.10)

$$\tau C_n = \int_0^{\tau} \cos[\varphi(t) - n\Omega t] dt = I_1 + I_2 + I_3, \quad (7.13)$$

式中

$$I_1 = \int_0^{\frac{\tau_1}{2}} \cos [(m-n)\Omega t] dt, \quad (7.14)$$

$$I_2 = \int_{\frac{\tau_1}{2}}^{\frac{2\pi-\tau_1}{2}} \cos \left(\frac{\Omega}{4(\tau-\tau_1)} \{m[4t(\tau-t)-\tau_1^2] - 4n(\tau-\tau_1)t\} \right) dt, \quad (7.15)$$

$$I_3 = \int_{\frac{2\pi-\tau_1}{2}}^{\pi} \cos \{ \Omega [m\tau - (m+n)t] \} dt. \quad (7.16)$$

I_1 与 I_3 不难计算。令

$$\alpha_n = (n - m\xi) \frac{\pi}{2}, \quad (7.17)$$

$$A_n = \frac{I_1 + I_3}{\tau}, \quad (7.18)$$

得出

$$A_n = \frac{2}{\pi(n^2 - m^2)} \left\{ m \cos \left[n(1-\xi) \frac{\pi}{2} \right] \sin \alpha_n - n \sin \left[n(1-\xi) \frac{\pi}{2} \right] \cos \alpha_n \right\}. \quad (7.19)$$

下面再来讨论公式 (7.15) 所表示的积分 I_2 。为了取消余弦符号中 t 的一次项，作变量置换

$$U = \sqrt{\frac{2m}{1-\xi}} \frac{t}{\tau} + n \sqrt{\frac{1-\xi}{2m}} - \sqrt{\frac{m}{2(1-\xi)}}. \quad (7.20)$$

由此

$$\frac{t}{\tau} = \sqrt{\frac{1-\xi}{2m}} U + \frac{1}{2} - n \frac{1-\xi}{2m}. \quad (7.21)$$

假定

$$\beta_n = \left[n - \frac{n^2(1-\xi)}{2m} - \frac{m(1+\xi)}{2} \right] \frac{\pi}{2}. \quad (7.22)$$

利用方程 (7.21) 与 (7.22)，并令 $\frac{I_2}{\tau} = B_n$ ，由 (7.15) 得出

$$B_n = \sqrt{\frac{1-\xi}{2m}} \int_{(n-m)\sqrt{\frac{1-\xi}{2m}}}^{(n+m)\sqrt{\frac{1-\xi}{2m}}} \cos\left(\frac{\pi}{2}U^2 + \beta_n\right) dU, \quad (7.23)$$

引入夫累涅耳积分

$$S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt, \quad (7.24)$$

得出

$$B_n = \sqrt{\frac{1-\xi}{2m}} \left\{ \cos \beta_n \left[C\left[(n+m)\sqrt{\frac{1-\xi}{2m}}\right] - C\left[(n-m)\sqrt{\frac{1-\xi}{2m}}\right] \right] \right. \\ \left. - \sin \beta_n \left[S\left[(n+m)\sqrt{\frac{1-\xi}{2m}}\right] - S\left[(n-m)\sqrt{\frac{1-\xi}{2m}}\right] \right] \right\}. \quad (7.25)$$

n 阶分量的总振幅为

$$|C_n| = |A_n + B_n|. \quad (7.26)$$

因为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{-n} &= \alpha_n - n\pi; & \beta_{-n} &= \beta_n - n\pi \\ A_{-n} &= (-1)^n A_n; & B_{-n} &= (-1)^n B_n \end{aligned} \right\}, \quad (7.27)$$

那末有

$$|C_{-n}| = |C_n|. \quad (7.28)$$

§ 7.2. 正弦律圆化的脉冲

在[文献 21]中, 足够完全地从理论上讨论了用具有正弦律圆化的非对称脉冲进行频率调制的信号频谱。

比较图 7.1 与图 7.2 可以看出, 此处所研究的脉冲只在区间 $\left(\frac{\tau_1}{2}, \frac{2\tau - \tau_1}{2}\right)$ 上与梯形脉冲有区别。因此, 我们仍利用积分 I_1 与 I_2 的计算结果以及 A_n 值, 而将积分 I_2 重新计算, 对于此处所研究的情形, 用 I'_2 来表示 I_2 , 且 $D_n = \frac{I'_2}{\tau}$ 。

在区间 $\left(\frac{\tau_1}{2}, \frac{2\tau - \tau_1}{2}\right)$ 中, 频率与相位根据下列规律变化,

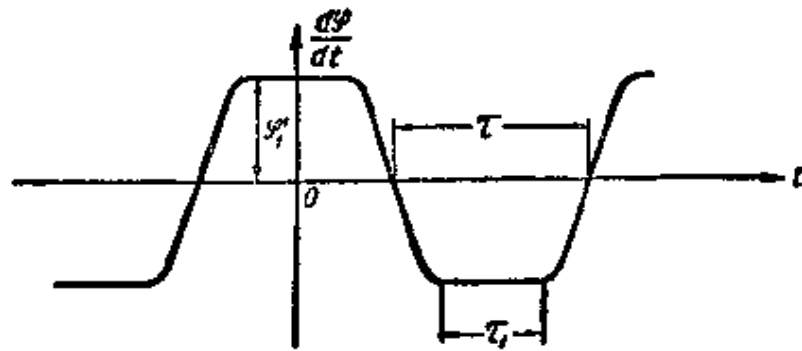


图 7.2 正弦律圆化脉冲的频率键控

$$\frac{d\varphi}{dt} = -m\Omega \sin \left[\left(\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau - \tau_1} \right) \pi \right], \quad (7.29)$$

$$\varphi(t) = \frac{m\Omega\tau_1}{2} + m\Omega \frac{\tau - \tau_1}{\pi} \cos \left[\left(\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau - \tau_1} \right) \pi \right]. \quad (7.30)$$

由此

$$\begin{aligned} I'_2 &= \int_{\frac{\tau_1}{2}}^{\left(\tau - \frac{\tau_1}{2}\right)} \cos [\varphi(t) - n\Omega t] dt \\ &= \int_{\frac{\tau_1}{2}}^{\left(\tau - \frac{\tau_1}{2}\right)} \cos \left\{ \frac{m\Omega\tau_1}{2} + m\Omega \frac{\tau - \tau_1}{\pi} \cos \left[\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau - \tau_1} \pi \right] - n\Omega t \right\} dt. \end{aligned} \quad (7.31)$$

引入符号

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{t - \frac{1}{2}}{1 - \xi} \pi \\ \psi &= (m\xi - n) \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (7.32)$$

则

$$I'_2 = \frac{\tau(1-\xi)}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \{n(1-\xi)y - m(1-\xi) \cos y - \psi\} dy. \quad (7.33)$$

因为积分限是对称的，故可不考虑奇次分量而将被积表示式展开。结果得到

$$I'_2 = \frac{2v(1-\xi)}{\pi} \cos \psi \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos [n(1-\xi)y] \cos [m(1-\xi) \cos y] dy \right\} \\ - \frac{2v(1-\xi)}{\pi} \sin \psi \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos [n(1-\xi)y] \sin [m(1-\xi) \cos y] dy \right\}. \quad (7.34)$$

公式 (7.34) 中的积分可以由著名的安格拉 (Ангер) 函数与维别拉 (Вебер) 函数来表示 [文献 15, 第 338、339 页]。然而，由于这些函数的表格列得不充分，因而对于此处我们要求确定积分数值的场合的用处显得不大。为了进行数值计算，利用洛麦利函数 (Функция Ломмеля) $S_{\mu, \nu}(z)$ 的特殊情况，亦即利用 $S_{-1, \nu}(z)$ 与 $S_{0, \nu}(z)$ ([文献 15 第 377 页] 与附录 V) 比较方便。我们所建立的这些函数的图形表示在图 II. V. 1 与 II. V. 2 上。于是

$$D_n = \frac{I'_2}{\tau} = -\frac{2v}{\pi n} \left[v \cos \psi \sin \left(\frac{1}{2} v\pi \right) S_{-1, \nu}(z) \right. \\ \left. + \sin \psi \cos \left(\frac{1}{2} v\pi \right) S_{0, \nu}(z) \right], \quad (7.35)$$

式中

$$S_{0, \nu}(z) = \frac{z}{1^2 - \nu^2} - \frac{z^3}{(1^2 - \nu^2)(3^2 - \nu^2)} \\ + \frac{z^5}{(1^2 - \nu^2)(3^2 - \nu^2)(5^2 - \nu^2)} - \dots; \quad (7.36)$$

$$S_{-1, \nu}(z) = -\frac{1}{\nu^2} + \frac{z^2}{\nu^2(2^2 - \nu^2)} - \frac{z^4}{\nu^2(2^2 - \nu^2)(4^2 - \nu^2)} + \dots; \quad (7.37)$$

$$\nu = n(1-\xi),$$

和

$$z = m(1-\xi).$$

容易相信

$$D_{-n} = (-1)^n D_n, \quad (7.38)$$

因此, 考虑到按照公式(7.27)

$$A_{-n} = (-1)^n A_n,$$

得到

$$|E_n| = |E_{-n}| = |A_n + D_n| = |A_{-n} + D_{-n}|. \quad (7.39)$$

如果 $\nu = n(1-\xi)$ 为整数, 那末, $S_{-1,\nu}(z)$ 或 $S_{0,\nu}(z)$ 变得不确定。为了在这些情况下确定公式(7.34)中的积分值, 我们利用下列表示式[文献15, 第30页],

$$J_n(z) = \frac{2}{\pi} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ny \sin(z \cos y) dy$$

(n ——奇数); (7.40)

$$J_n(z) = \frac{2}{\pi} (-1)^{\frac{1}{2}n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ny \cos(z \cos y) dy$$

(n ——偶数)。 (7.41)

当将(7.40)与(7.41)中所得到的积分值代入公式(7.34)后, 得到下列形式:

ν 为奇数时

$$I'_2 = \frac{2\nu(1-\xi)}{\pi} \left[-\nu \cos \psi \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) S_{-1,\nu}(z) - \sin \psi J_{n(1-\xi)}(z) \frac{\pi}{2} (-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)} \right]; \quad (7.42)$$

ν 为偶数时

$$I'_2 = \frac{2\nu(1-\xi)}{\pi} \left[\cos \psi J_{n(1-\xi)}(z) \frac{\pi}{2} (-1)^{\frac{\nu}{2}} - \sin \psi \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) S_{0,\nu}(z) \right]. \quad (7.43)$$

§ 7.3. 频带宽度的计算结果

我们根据公式(7.19)、(7.25)与(7.35)计算过调制指数为 $m = \frac{2D}{B} = 1-24(0.5)$ 时的梯形脉冲及正弦律调化脉冲的频谱分量振幅。对这些 m 值曾经做过选择, 以便能包括所有在无线电报通信

中实际应用的键控速度 B 与频率偏差 D 。取参数 $\xi = \frac{\tau_1}{\tau}$ 为 0.9、0.8 与 0.7，与此对应的信号建立时间，大大低于改良的起止式电报设备的性能（等于 35—40%）。

根据所得结果，我们曾计算了辐射所占用的频带宽度，这宽度由包含 99% 辐射功率的分量的振幅的平方和来确定。这样，辐射所占用的频带宽度可表示为值 $n = \frac{\Delta f}{B}$ ，这些值我们以调制指数 m 的函数形式列于附录 VI 中。

由表 II. VI. 1 可以看出下面几点：

a) 当 ξ 值相同时，梯形脉冲与正弦律圆化的脉冲，几乎在所有 m 值下占用着相同的频带，只是当 m 值较小时，具有正弦律圆化的脉冲所占用的频带要比梯形脉冲宽一些。

b) 当 $m < 2$ 时，脉冲的圆化不会减低辐射所占用的频带；和改良的起止式电报设备性能相比较，不太大的圆化 ($\xi = 0.7$)，当 $m = 3$ 时，能把占用频带宽度减低 30% 以上，当 $m = 4$ 时，则能减低 10% 左右。

b) 采用 $\xi < 0.7$ ，以及在小的 m 下采用 $\xi < 0.8$ ，已经不会减低被占用的频带宽度，因为此时已达到了与正弦形信号相当的极限（见第六章）。

§ 7.4. 不同信号形状的带外辐射

频率-键控信号可以表示为 (7.9) 的形式，如果不对函数 $\frac{d\varphi}{dt}$ 加上关于它的奇偶性方面的附加条件，那末 (7.10) 将具有

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos [y(t) - n\Omega t] dt \quad (7.44)$$

的形式。

将 (7.44) 表示为

$$C_n = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} [\cos \varphi(t) \cos n\Omega t + \sin \varphi(t) \sin n\Omega t] dt \quad (7.45)$$

的形式，並將(7.45)分為兩個積分之和，

$$C_{n(1)} = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \cos \varphi(t) \cos n\Omega t dt, \quad (7.46)$$

$$C_{n(2)} = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \sin \varphi(t) \sin n\Omega t dt. \quad (7.47)$$

下面我們在鍵控函數 $\frac{d\varphi}{dt}$ 表示為矩形脈沖的情形來討論(7.46)，亦即在區間 $0 \leq t < \frac{\tau}{2}$ 上， $\frac{d\varphi}{dt} = m\Omega$ ；在區間 $\frac{\tau}{2} \leq t < \tau$ 上， $\frac{d\varphi}{dt} = -m\Omega$ 。此時(7.46)具有下列形式：

$$C_{n(1)} = \frac{1}{\tau} \left[\int_0^{\frac{\tau}{2}} \cos m\Omega t \cos n\Omega t dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \cos m\Omega(\tau - t) \cos n\Omega t dt \right]. \quad (7.48)$$

如果 m 為偶數，那末，由於 $\Omega = \frac{\pi}{\tau}$ ，

$$\cos m\Omega(\tau - t) = \cos m\Omega t;$$

因此，(7.48) 可以寫成

$$C_{n(1)} = \frac{1}{2\tau} \left[\int_0^{\tau} \cos(m+n)\Omega t dt + \int_0^{\tau} \cos(m-n)\Omega t dt \right], \quad (7.49)$$

的形式。

如果 $n \neq \pm m$ ，那末由(7.49)得到

$$C_{n(1)} = 0.$$

如果 $n = \pm m$ ，那末 $C_{n(1)} = \frac{1}{2}$ 。

如果 m 為奇數，則 $\cos m\Omega(\tau - t) = -\cos m\Omega t$ ，因此，(7.48) 可以寫為下列形式：

当 $n \neq \pm m$ 时

$$C_{n(1)} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{\sin(m+n)\frac{\tau\Omega}{2}}{(m+n)\Omega} + \frac{\sin(m-n)\frac{\tau\Omega}{2}}{(m-n)\Omega} \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } n \text{ 为奇数;} \\ \left. \begin{aligned} & \pm \frac{2m}{\pi(m^2-n^2)} \\ & \pm \frac{2n}{\pi(m^2-n^2)} \end{aligned} \right\} & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \end{cases}$$

当 $n = \pm m$ 时

$$C_{n(1)} = \frac{1}{2\tau} \left[\int_0^{\frac{\tau}{2}} dt - \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} dt \right] = 0.$$

这样, 我們討論过了由矩形脉冲进行键控条件下的等式(7.46)。在这同一条件下, (7.47) 具有

$$C_{n(2)} = \frac{1}{\tau} \left[\int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin m\Omega t \sin n\Omega t dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \sin m\Omega(\tau-t) \sin n\Omega t dt \right] \quad (7.50)$$

的形式。

如果 m 为偶数, 则 $\sin m\Omega(\tau-t) = -\sin m\Omega t$; 因此, (7.50) 可以表示为

$$C_{n(2)} = \frac{1}{\tau} \left[\int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin m\Omega t \sin n\Omega t dt - \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \sin m\Omega t \sin n\Omega t dt \right] =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{当任意偶数 } n, \text{ 其中包括 } n = \pm m; \\ \left. \begin{aligned} & \pm \frac{2m}{\pi(m^2-n^2)} \\ & \pm \frac{2n}{\pi(m^2-n^2)} \end{aligned} \right\} & \text{当奇数 } n. \end{cases}$$

如果 m 为奇数，则当 $n \neq \pm m$ 时，值 $\sin m\Omega(\tau-t) = \sin m\Omega t$ ，因此，(7.50) 式可以表示为下列形式：

$$\begin{aligned} C_{n(2)} &= \frac{1}{\tau} \left[\int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin m\Omega t \sin n\Omega t dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \sin m\Omega t \sin n\Omega t dt \right] = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \sin m\Omega t \sin n\Omega t dt = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{当 } n \neq \pm m; \\ \frac{1}{2} & \text{当 } n = \pm m. \end{cases} \end{aligned}$$

下面我们选择最典型的函数来作为键控信号 $\frac{d\varphi}{dt}$ ，该函数能同时
在高頻下很容易地逼近辐射频谱分量。这就是具有水平中央部分的
函数，水平部分的持续时间大于信号总持续时间的一半，而这些区
域间的过渡过程是连续和单调的。如果将这些限制加在 $\frac{d\varphi}{dt}$ 上，那末
 $\varphi(t)$ 将具有接近于圆化顶部的三角形形状。

假定 m 为偶数。如果键控函数满足上述限制，那末 $\sin \varphi(t)$ 的
形状将与矩形调制时（在 $\sin \varphi(t) \approx \frac{m\pi}{2} - \varphi(t)$ 范围内变动）所得到的
相似（准确到只差一符号）。

如所周知，函数急速变化的区域（亦即 $\sin \varphi(t) \approx \frac{m\pi}{2} - \varphi(t)$ 的
区域），对频谱的高频分量的大小有很大的影响。因此，在确定频谱
的高频分量时，可以用 $\frac{m\pi}{2} - \varphi(t)$ 来代替 $\sin \varphi(t)$ ，或者简单地用
 $\varphi(t)$ 来代替 $\sin \varphi(t)$ （因为 $\int_0^{2\tau} \frac{m\pi}{2} \sin n\Omega t dt = 0$ ）。于是，我们得
到

$$C_{n(3)} = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \varphi(t) \sin n\Omega t dt, \quad (7.51)$$

将 (7.51) 式进行分部积分, 得到

$$C_{n(\frac{2}{n})} = \frac{1}{2\tau} \left[-\frac{1}{n\Omega} \cos n\pi \cdot \varphi(2\tau) + \frac{1}{n\Omega} \varphi(0) + \frac{1}{n\Omega} \int_0^{2\tau} \frac{d\varphi}{dt} \cos n\Omega t dt \right]. \quad (7.52)$$

考虑到在我们选定的键控函数渐近式下, $\varphi(0) = \varphi(2\tau) = 0$, 故得出(7.52)的形式为

$$C_{n(\frac{2}{n})} = C_n = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\tau} \frac{d\varphi}{dt} \cos n\Omega t dt = \frac{1}{n\Omega} \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{d\varphi}{dt} \cos n\Omega t dt. \quad (7.53)$$

键控函数 $\frac{d\varphi}{dt}$ 选定为偶函数时的频谱分量, 将具有

$$M_n = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{d\varphi}{dt} \cos n\Omega t dt \quad (7.54)$$

的形式。

将 (7.53) 与 (7.54) 进行比较, 可以看出:

$$C_n = \frac{1}{n\Omega} M_n. \quad (7.55)$$

如果 m 为奇数, 且 $n \neq \pm m$, 那末[参阅方程 (7.46)]

$$C_n = C_{n(1)} = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \cos \varphi(t) \cos n\Omega t dt. \quad (7.56)$$

此处 $\cos \varphi(t)$ 在变量 $\varphi(t)$ 接近于 $\frac{m\pi}{2}$ 的区域中变化。将(7.56)

式表示为

$$C_n = C_{n(1)} = \pm \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \sin \left[\frac{m\pi}{2} - \varphi(t) \right] \cos n\Omega t dt. \quad (7.57)$$

由于 $\left[\frac{m\pi}{2} - \varphi(t) \right]$ 接近于零, 故 $\sin \left[\frac{m\pi}{2} - \varphi(t) \right] \approx \frac{m\pi}{2} - \varphi(t)$,

从而表示式 (7.57) 具有

$$C_n = C_{n(1)} = \mp \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \varphi(t) \cos n\Omega t dt \quad (7.58)$$

的形式。

将 (7.58) 式进行分部积分, 得出

$$C_n = C_{n(\Omega)} = \pm \frac{1}{n\Omega} \frac{1}{2\tau} \int_c^{2\tau} \frac{d\varphi}{dt} \sin n\Omega t dt, \quad (7.59)$$

此时选定为奇函数的键控函数 $\frac{d\varphi}{dt}$ 的频谱分量, 将具有

$$M_n = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{d\varphi}{dt} \sin \Omega t dt \quad (7.60)$$

的形式。

将 (7.59) 与 (7.60) 进行比较, 又得出 (7.55) 型的表示式

$$C_n = \pm \frac{1}{n\Omega} M_n. \quad (7.61)$$

如果 m 不是整数, 而键控函数满足与整数 m 时相同的限制, 那末, 函数 $\sin \varphi(t)$ 具有类似于矩形信号 (在 $\varphi(t)$ 接近于 $\frac{m\pi}{2}$ 的区域内变化) 时所得到的形状。在 $\varphi(t)$ 接近 $\frac{m\pi}{2}$ 的这个区域内:

$$\begin{aligned} \sin \varphi(t) &= \sin \left\{ \frac{m\pi}{2} + \left[\varphi(t) - \frac{m\pi}{2} \right] \right\} = \\ &= \sin \frac{m\pi}{2} \cos \left[\varphi(t) - \frac{m\pi}{2} \right] + \cos \frac{m\pi}{2} \sin \left[\varphi(t) - \frac{m\pi}{2} \right] \approx \\ &\approx \sin \frac{m\pi}{2} + \left[\varphi(t) - \frac{m\pi}{2} \right] \cos \frac{m\pi}{2}. \end{aligned} \quad (7.62)$$

以及

$$\begin{aligned} \cos \varphi(t) &= \cos \left\{ \frac{m\pi}{2} + \left[\varphi(t) - \frac{m\pi}{2} \right] \right\} = \\ &= \cos \frac{m\pi}{2} \cos \left[\varphi(t) - \frac{m\pi}{2} \right] - \sin \frac{m\pi}{2} \sin \left[\varphi(t) - \frac{m\pi}{2} \right] \approx \\ &\approx \cos \frac{m\pi}{2} - \left[\varphi(t) - \frac{m\pi}{2} \right] \sin \frac{m\pi}{2}. \end{aligned} \quad (7.63)$$

将相应于 (7.63) 与 (7.62) 中所得到的 $\cos \varphi(t)$ 和 $\sin \varphi(t)$ 的值代入 (7.46) 与 (7.47) 中, 经过变换后得到

$$C_{n(1)} \underset{(n \gg m)}{\approx} \sin \frac{m\pi}{2} \frac{1}{n\Omega} \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{d\varphi}{dt} \sin n\Omega t dt, \quad (7.64)$$

$$C_{n(2)} \underset{(n \gg m)}{\approx} \cos \frac{m\pi}{2} \frac{1}{n\Omega} \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{d\varphi}{dt} \cos n\Omega t dt. \quad (7.65)$$

对非整数值的 m ，键控函数 $\frac{d\varphi}{dt}$ 频谱的正弦分量与余弦分量将分别具有

$$M_{n(1)} = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{d\varphi}{dt} \sin n\Omega t dt, \quad (7.66)$$

$$M_{n(2)} = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{d\varphi}{dt} \cos n\Omega t dt \quad (7.67)$$

的形式。

将 (7.64)、(7.65) 分别与 (7.66) 和 (7.67) 进行比较，得到

$$C_{n(1)} \underset{(n \gg m)}{\approx} \sin \frac{m\pi}{2} \cdot \frac{1}{n\Omega} M_{n(1)}, \quad (7.68)$$

$$C_{n(2)} \underset{(n \gg m)}{\approx} \cos \frac{m\pi}{2} \frac{1}{n\Omega} M_{n(2)}. \quad (7.69)$$

于是，我们证明了：在一般情况下（当任意的 m 值时），用具有最典型形状的脉冲进行频率调制的信号的频谱分量，在高频时与调制函数的频谱分量成正比，与分量的号数成反比。

在 § 7.3 中曾经指出，从传输所占用的频带来看，梯形脉冲与正弦律圆化脉冲实际上是等价的。然而，从本章的讨论中可以看出，频率-键控式信号的带外辐射衰减速度，系由键控函数的形状来确定，如同在第五章中所指出的一样，正弦律圆化的脉冲具有比梯形脉冲大一些的带外辐射衰减速度。因为在选择脉冲的形状时，不仅应考虑所占用的频带宽度，而且也要考虑到带外辐射的衰减速度，故正弦律圆化脉冲比梯形脉冲要优越一些。

第八章 傳輸占用頻帶寬度与信号 延迟時間之間的关系

在第五章里曾經从有关波道通过能力的仙农理論的观点研究过减少带外輻射能量的可能性。本章討論信号延迟的概念和它对波道通过能力所增加的一些限制。

既然无限延迟的信号是不现实的，便产生了一个問題，即：能否获得具有有限延迟時間并使我們能良好地利用頻带的信号？文中导出了在有限延迟時間的条件下，确定通信波道通过能力的公式，由这些公式可以看出，当延迟時間較小时的波道通过能力，要比延迟時間为无穷大的波道的通过能力低一些。

确定出在給定頻带中包含着能量最大部分的、具有有限頻譜的信号形状；并且指出解决此問題时，得到与有限持續信号相同的积分方程和脉冲形状。

§ 8.1. 波道的通过能力与延迟時間

如果干扰系我們在緒論中所提到的白噪声，那末，由頻帶寬度 F 所限制的波道的通过能力按仙农公式[文献28]表示为：

$$C = F \log_2 \frac{P + N}{N}, \text{ 每秒二进制单位} \quad (8.1)$$

式中

P ——信号功率；

N ——干扰功率。

如果信号 $g(t)$ 不包含超过頻带 F 的頻率，且在時間區間 $-\infty$ 至 $+\infty$ 上是已知的，那末，可以将它表示为柯捷里尼可夫級数的形式：

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{n}{2F}\right) \cdot \frac{\sin 2\pi F\left(t - \frac{n}{2F}\right)}{2\pi F\left(t - \frac{n}{2F}\right)}. \quad (8.2)$$

由(8.2)式可以看出，如果我们每经过时间间隔 $\tau = \frac{1}{2F}$ 重发出无穷短的脉冲，而这些短脉冲的值恰好是函数 $g(t)$ 在这些时刻的值的话，那末，传输这些脉冲不会发生振幅畸变。

下面来研究具有 (图 8.1)

$$g(t) = g_0 \frac{\sin 2\pi F(t-t_0)}{2\pi F(t-t_0)} \quad (8.3)$$

形式的单一信号。

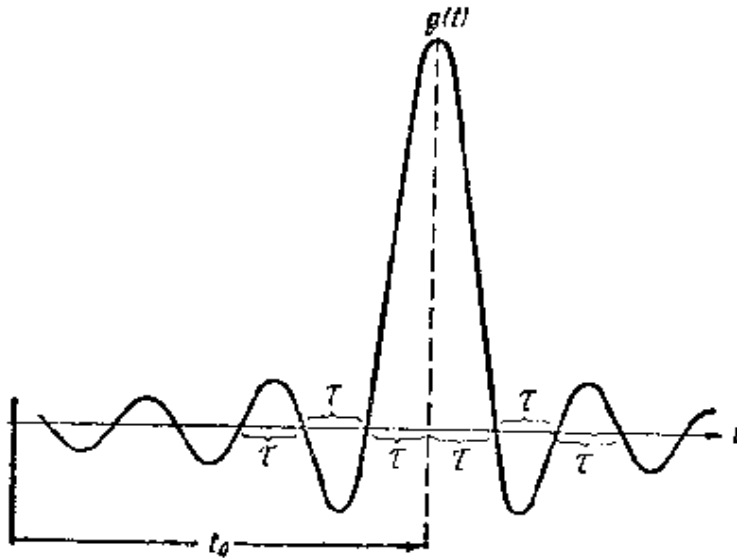


图 8.1 经过理想滤波器传输的基本信号

此信号在 $t=t_0$ 时刻达到最大值，并且由 0 至 t_0 的时间间隔为脉冲的延迟时间。每经过时间 τ ，脉冲达到一次零值。因此，如果我们希望脉冲的最大值不因有邻近脉冲而发生畸变，那末应当按时间间隔 $\frac{1}{2F}$ 来传输我们所需要的那些脉冲。脉冲传输的速度将为

$$B = \frac{1}{\tau} = 2F \quad \text{波特.}$$

由此 $F = \frac{B}{2}$ ；或者考虑到在高频下，我们通常定义频带 $\Delta f = 2F$ ，故得出 $\Delta f = B$ ，也就是好象我们有了极其良好的传输系统，

该系统甚至在双频带工作时，也比所有现存的系统优越，因为对一般双频带振幅调制 $\Delta f = (3-5)B$ ，而对于理想脉冲 $\Delta f = 2.3B$ 。这种系统在频带界外不会产生任何带外辐射。

由于通信波道中存在有干扰的缘故，每一个脉冲可以保证有 $m = \sqrt{\frac{P+N}{N}}$ 个振幅级的选择。因此，借助于 n 个这样的脉冲，可以保证每秒有 n^m 个选择，而传输速度

$$C = \log_2 n^m = \log_2 m^n,$$

或者，由于 $m = \sqrt{\frac{P+N}{N}}$ ，故

$$C = B \log_2 \sqrt{\frac{P+N}{N}}. \quad (8.4)$$

如果我们能从两个状态中进行选择（一般的电报），那末

$$C = B. \quad (8.5)$$

下面来讨论，应当怎样才能得到由(8.2)式确定的、为在时间上隔开 $\frac{1}{2F}$ 、且具有(8.3)形式的基本信号的序列的信号 $g(t)$ 。

假定我们为此目的而利用具有下列传输特性的带通滤波器，

$$\left. \begin{aligned} |z(\omega)| &= z_0 = \text{常数} \\ \varphi(\omega) &= \omega t_0 \\ z(\omega) &= z_0 e^{i\omega t_0} \end{aligned} \right\}, \quad (8.6)$$

式中 t_0 ——滤波器的延迟时间。

然而，由传输特性(8.6)所描述的理想滤波器，仅在无穷大的延迟时间 t_0 下，才可能复现出(8.3)形式的函数，这是因为当 $Ft_0 = \infty$ 时， $z(\omega)$ 与 t_0 之间的关系使我们可以得到阶梯形的频带限制。因此，如果 F 有限，那末 t_0 应当为无穷大，反之，严格地说来，有限的延迟时间 t_0 对应着无穷的频带。由于公式(8.1)是从将信号表示为柯捷里尼可夫级数(8.2)形式而引出的，而只有当无限长的延

迟时间下，才可以借助于理想滤波器(8.6)获得柯捷里尼可夫形式的级数，那末，公式(8.1)仅当 $t_0 = \infty$ 时才正确。

下面讨论如何确定具有有限延迟时间的系统的波道通过能力。

§ 8.2. 保证传输有限延迟信号的通信系统特性

为了获得具有有限延迟的基本信号 $g_p(t)$ ，在信号(8.3)上加上形式为

$$g_s(t) = \begin{cases} -g(t) & \text{当 } t < 0 \\ g_0 \frac{\sin 2\pi F'(t-t_0)}{2\pi F(t+t_0)} & \text{当 } t > 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

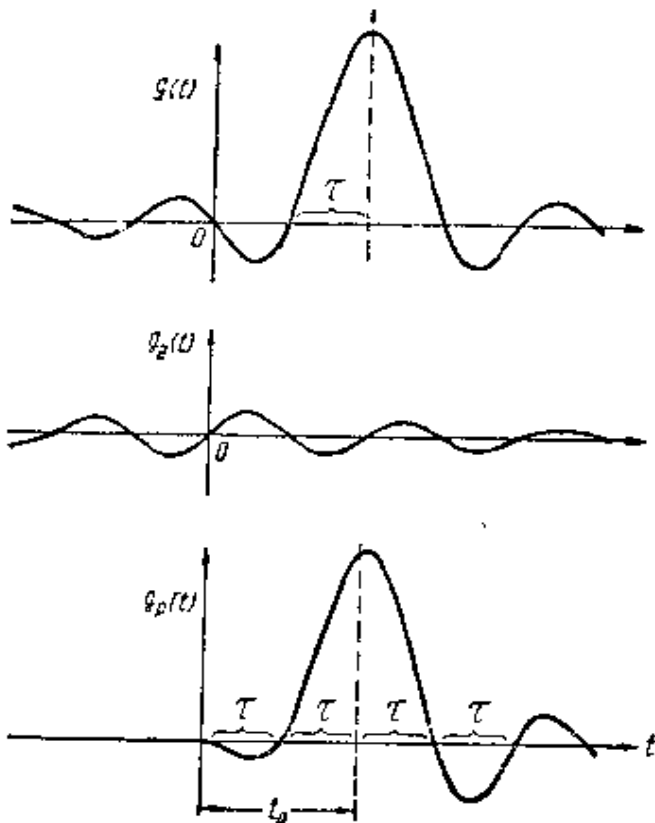


图 8.2 具有有限延迟 t_0 的基本信号 $g_p(t)$ 相位特性记为 $\varphi_1(\omega)$ ，则有

$$z_1(\omega) = |z_1(\omega)| e^{-i\varphi_1(\omega)}. \quad (8.8)$$

于是，输出信号 $g_p(t)$ 的频谱 $\Omega(\omega)$ 将为

的信号。

于是，我们得到如图 8.2 所示的信号。

当 $t < 0$ 时，信号 $g_p(t) = g(t) + g_s(t)$ 等于零，它具有与信号 $g(t)$ 相同的最大值（等于 g_0 ）；它的延迟时间是有限的并等于 t_0 。

现在来讨论，滤波器应当具有怎样的传输特性，才能使无限短脉冲加在其输入端上时，在它的输出端上得到信号 $g_p(t)$ 。将该滤波器的传输特性记为 $z_1(\omega)$ ，

$$\mathcal{Q}(\omega) = 1 \cdot z_1(\omega) = |z_1(\omega)| e^{-i\varphi_1(\omega)}. \quad (8.9)$$

另一方面,

$$\mathcal{Q}(\omega) = \int_0^{\infty} g_p(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (8.10)$$

将从方程(8.3)与(8.7)中得到的 $g_p(t) = g(t) + g_s(t)$ 值代入公式(8.10)中, 再分别比较等式(8.10)中的实部与虚部, 得到:

$$|z_1(\omega)| \cos [\varphi_1(\omega)] = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} g_p(t) e^{-i\omega t} dt;$$

$$|z_1(\omega)| \sin [\varphi_1(\omega)] = \operatorname{Im} \int_0^{\infty} g_p(t) e^{-i\omega t} dt;$$

$$|z_1(\omega)| = \sqrt{\left[\operatorname{Re} \int_0^{\infty} g_p(t) e^{-i\omega t} dt \right]^2 + \left[\operatorname{Im} \int_0^{\infty} g_p(t) e^{-i\omega t} dt \right]^2};$$

$$\varphi_1(\omega) = \arccos \left[\frac{\operatorname{Re} \int_0^{\infty} g_p(t) e^{-i\omega t} dt}{|z_1(\omega)|} \right].$$

由此得到:

当 $\omega > 2\pi F$ 时

$$|z_1(\omega)| \cos [\varphi_1(\omega)] = 0$$

且在所有频率下 $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$ 。

$$\begin{aligned} |z_1(\omega)| \sin [\varphi_1(\omega)] &= \frac{1}{\pi} [\operatorname{Ci}(\omega + 2\pi F)t_0 \\ &- \operatorname{Ci}(\omega - 2\pi F)t_0] \cos \omega t_0 - \frac{1}{\pi} [-\operatorname{Si}(\omega + 2\pi F)t_0 \\ &+ \operatorname{Si}(\omega - 2\pi F)t_0] \sin \omega t_0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

当 $\omega < 2\pi F$ 时

$$\begin{aligned} |z_1(\omega)| \cos [\varphi_1(\omega)] &= \cos \omega t_0; \\ |z_1(\omega)| \sin [\varphi_1(\omega)] &= \sin \omega t_0 + \frac{1}{\pi} [\operatorname{Ci}(\omega + 2\pi F)t_0 - \\ &- \operatorname{Ci}(2\pi F - \omega)t_0] \cos \omega t_0 - \frac{1}{\pi} [\pi + \operatorname{Si}(\omega + 2\pi F)t_0 \\ &- \operatorname{Si}(\omega - 2\pi F)t_0] \sin \omega t_0. \end{aligned} \quad (8.12)$$

今后我們取

$$|z_1(\omega)| = 1.$$

图 8.3 上示有某些 $2\pi Ft_0$ 值的函数 $|z_1(\omega)|$ ，并且将 $|z_1(\omega)|$ 与比值 $\frac{\omega}{2\pi Ft_0}$ 的关系以分贝表示。

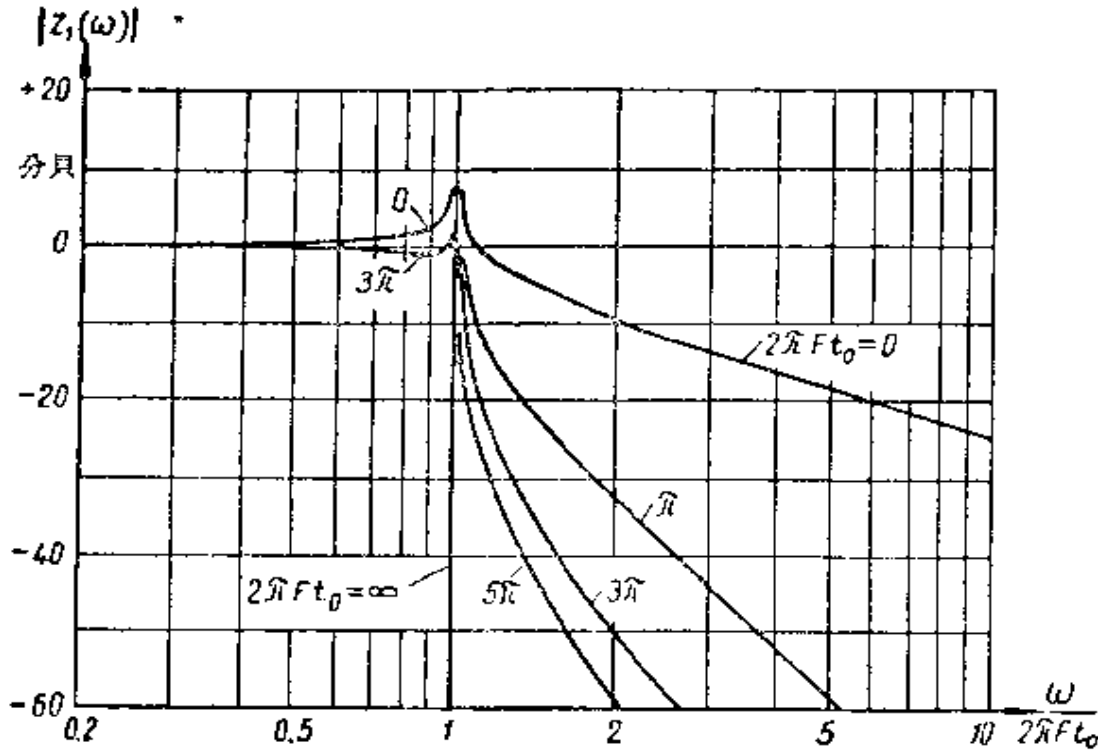


图 8.3 经过具有有限延时 t_0 的系统进行传输时的传输频谱 $z_1(\omega)$

当 $2\pi Ft_0 = \infty$ 时，函数 $|z_1(\omega)|$ 具有矩形形式。当 $2\pi Ft_0 = 0$ 时

$$|z_1(\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{\omega + 2\pi F}{2\pi F - \omega}\right)^2}, \quad \text{当 } \omega < 2\pi F \quad (8.13)$$

和

$$|z_1(\omega)| = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\omega + 2\pi F}{2\pi F - \omega}, \quad \text{当 } \omega > 2\pi F. \quad (8.14)$$

由图 8.3 可以看出，当延迟时间 t_0 减少时，传输频谱 $|z_1(\omega)|$ 随着 ω 的增加而减少得愈来愈慢，因此，传输频带的宽度无限地增加。如果将频带界限规定在某个确定的电平，例如规定为 40 分贝，那末，频带宽度近似地与延迟时间 t_0 成反比例地变化。因此，具有有限延时 t_0 的信号的实际频带宽度，将永远宽于 F 。

表 8.1 中列出在电平 -40 分贝时, 频带宽度的实际值 F_0 与 F 的比值:

表 8.1 中所列的数据, 相应于 $2\pi Ft_0$ 为 $\frac{\pi}{2}$ 的倍数时的频带宽度值。如果取用任意的 $2\pi Ft_0$ 值, 那末, 频带宽度只可以取较大一些的数值, 因为脉冲将不从零开始。

表 8.1

$2\pi Ft_0$	在 -40 分贝电平时的 $\frac{F_0}{F}$
0	63.8
π	2.61
2π	1.86
3π	1.58
4π	1.44
5π	1.36
6π	1.30
7π	1.26

表 8.2

Ft_0	h
0	0.0157
1.305	0.383
1.86	0.537
2.37	0.632
2.88	0.694
3.40	0.736
3.90	0.769
4.41	0.793

§ 8.3. 考虑延时时的波道通过能力

如果在有限延时 t_0 下, 实际的频带宽度 F_0 将比 F 大, 那末, 这也相应地在波道通过能力方面有所反映。如果引入系数

$$h(F, t_0) = \frac{F}{F_0},$$

式中 F ——相应于组成柯捷里尼可夫级数 (8.2) 的无限延迟的基本信号的起始频带宽度, 而 F_0 ——具有有限延时的基本信号的实际频带宽度。那末, 波道的通过能力将等于

$$C_1 = Fh(F, t_0) \log_2 \frac{P + N}{N} \quad (8.15)$$

每秒二进制单位, 并且恒有系数 $h \leq 1$ 。

函数 $h(t)$ 可根据表 8.1 算出, $h(t)$ 的图形如图 8.4 所示。由列有该函数值的表 8.2 可以看出, 与具有无限延时的波道通过能力

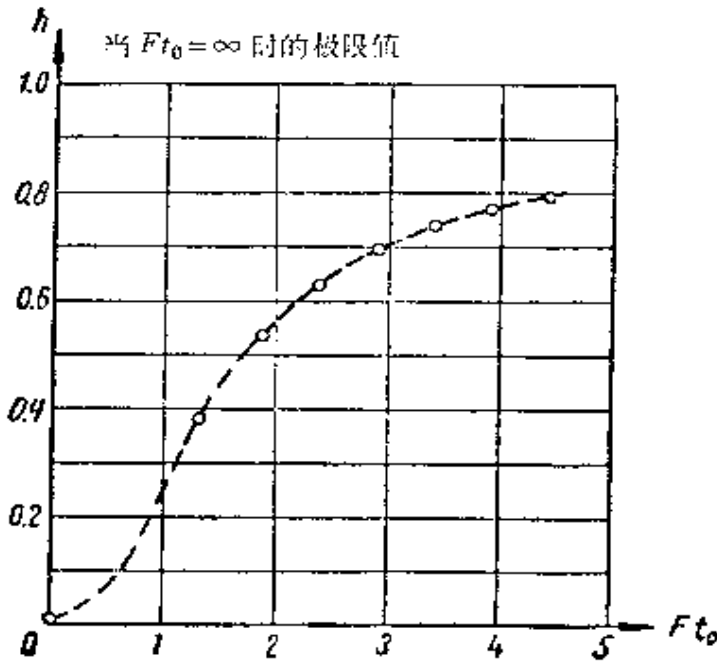


图 8.4 有限延时时波道通过能力减低的系数

在电报中，不致大为减低波道通过能力的延时，和某些现有的多路系统中的延时具有相同的长度。

在以 3.5 千赫的频带宽度传输语言的波道中，延时为

$$t_0 = \frac{10 \cdot 1000}{3500} \approx 3 \text{ 毫秒.}$$

这样，当延时为数毫秒时，实际上已经达到了按仙农公式(8.1)所确定的波道通过能力的极限值。比上述延时还要小得多的通信系统，在同样的频带宽度值下，波道通过能力将十分低。

从原则上来说，具有极其小的延时的波道通过能力，可以用人为地增大延时的办法来加以提高。

§ 8.4. 占用最小频带、频谱有限的信号形状

假定在滤波器的输入端上加入有限持续时间 $\left(-\frac{\tau}{2}, +\frac{\tau}{2}\right)$ 的信号 $G(t)$ ，并且滤波器有使输出信号 $g(t)$ 的频谱在角频率 $(-\omega_0, +\omega_0)$ 以外的所有频率均不出现的特性。

(由方程(8.1)来确定)相比，当延时较小时，波道通过能力大大地降低了。然而 h 迅速地增长，并当 Ft_0 的值接近于 2 时， h 达到 $\frac{1}{2}$ 。且仅当极大的 Ft_0 值（接近于 10）时， h 的大小才达到接近于 1 的数值。

现在来确定输入信号 $G(t)$ 应当具有怎样的形状, 才能在频带 $(-\omega_0, +\omega_0)$ 中包含有其总能量的最大部分。

利用傅里叶反变换, 可以由该信号的频谱 $\Omega(\omega)$ 获得输出信号 $g(t)$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \Omega(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \cdot e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(\tau) d\tau \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi t} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{t-\tau} G(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8.16)$$

表示式(8.16)将信号频谱有限条件下的滤波器输入信号 $G(t)$ 和输出信号 $g(t)$ 联系起来。

下面根据最大能量定义 $\frac{W}{W_{no.en}}$, 或者简单地說根据 W (因为按照所爱用的归一化 $W_{no.en} = 1$) 来解决变分问题:

$$W = \frac{\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} |\Omega(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(\omega)|^2 d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt} = \frac{J_1}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt}, \quad (8.17)$$

此处, 考虑到(8.16)

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-x)}{\pi(t-x)} \cdot \frac{\sin \omega_0(t-y)}{\pi(t-y)} G(x) G(y) dx dy \\ &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(x) G(y) dx dy \frac{1}{2} [J_2 - J_3]; \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega_0(y-x)}{(t-x)(t-y)} dt = 0; \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega_0(2t-x-y)}{(t-x)(t-y)} dt = \\ &= \frac{1}{x-y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega_0(2t-x-y)}{t-x} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega_0(2t-x-y)}{t-y} dt \right] \\ &= \frac{2 \sin \omega_0(y-x)}{\pi(x-y)}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

将(8.19)中的 J_2 与(8.20)中的 J_3 代入(8.18), 并考虑到(8.16), 得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(x)G(y) dx dy \cdot \frac{\sin \omega_0(x-y)}{\pi(x-y)} \\ &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(t)g(t) dt, \end{aligned} \quad (8.21)$$

将(8.21)中的 $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt$ 代入(8.17), 可将(8.17)写为

$$W = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt} = \frac{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(t)g(t) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt}, \quad (8.22)$$

为了在信号频谱加以限制后, 按频带 $(-\omega_0, +\omega_0)$ 中能量最大的定义来解决变分问题, 我们取(8.22)的一级变分并令它等于零,

$$\begin{aligned} \delta W &= \\ &= \frac{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} (\delta g \cdot G + \delta G \cdot g) dt \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt - \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} 2G \cdot \delta G dt \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(t)g(t) dt}{\left[\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt \right]^2} \\ &= 0; \end{aligned}$$

由此

$$\frac{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} (\delta g \cdot G + \delta G \cdot g) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} 2 G \cdot \delta G dt} = \frac{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(t) g(t) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt}. \quad (8.23)$$

从表示式(8.16)中求出 $\delta g(t)$ 值

$$\delta g(t) = \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} \delta G(\tau) d\tau. \quad (8.24)$$

(核仍旧没有变更, 因为我们感兴趣的不是变量的增量, 而是输入信号的增量)。

我们来证明:

$$\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G \cdot \delta g dt = \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g \cdot \delta G dt. \quad (8.25)$$

写出(8.25)的左边部分, 并将(8.24)中的 $\delta g(t)$ 值代入

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G \cdot \delta g dt &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(t) \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} \delta G(\tau) d\tau dt = \\ &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} G(t) \cdot \delta G(\tau) \cdot d\tau dt. \end{aligned}$$

写出(8.25)的右边部分, 并将等式(8.16)的 g 值代入

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g \cdot \delta G dt &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} G(\tau) \cdot \delta G(t) \cdot d\tau dt = \\ &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} G(t) \cdot \delta G(\tau) \cdot d\tau dt, \end{aligned}$$

亦即表示式(8.25)的左边部分和其右边部分相等, 故等式(8.25)得证。

现在回过头来讨论等式(8.23)。

根据(8.25), (8.23)左边分子中的两项之和为

$$\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} (\delta g \cdot G + \delta G \cdot g) dt = 2 \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g \cdot \delta G \cdot dt,$$

从而等式(8.23)可以改写为

$$\frac{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g \cdot \delta G dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G \cdot \delta G dt} = \frac{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(t)g(t) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt} = W, \quad (8.26)$$

的形式。

由此，

$$\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} [g - WG] \delta G dt = 0. \quad (8.27)$$

方程(8.27)为两个函数乘积的积分，其中的一个函数—— δG 是任意的。这个表示式等于零；因此，方括号内的表示式也应当（在积分限内）为零。

于是在积分限

$$-\frac{\tau_0}{2} < t < +\frac{\tau_0}{2}$$

内

$$g(t) = WG(t). \quad (8.28)$$

现在再来证明逆向关系。

如果输入信号 $G(t)$ 与输出信号 $g(t)$ 用等式(8.28)联系起来，那末， W 将等于由频谱的界限与转换 $G(t) \rightarrow g(t)$ 所决定的能量部分。

根据(8.28)

$$g(t) - WG(t) = 0$$

因此

$$\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} [g(t) - WG(t)] \delta G(t) dt = 0$$

或

$$\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g(t) \cdot \delta G(t) dt - W \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(t) \cdot \delta G(t) dt = 0,$$

考虑到(8.21)与(8.26), 由此得到

$$\begin{aligned} W &= \frac{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g(t) \cdot \delta G(t) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(t) \cdot \delta G(t) dt} = \frac{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G(t) g(t) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt} = W, \end{aligned}$$

亦即我們得到了与按频谱限制进行滤除时相同的 W , 于是逆向关系得证。

下面我們来求确定信号形状的积分方程 (該信号的給定能量部分集中在最小的频带中)。由(8.28)可以看出, 在区间 $-\frac{\tau_0}{2} < t < +\frac{\tau_0}{2}$ 上, 輸入信号 $G(t)$ 与輸出信号 $g(t)$ 成比例。

将(8.28)中的 $G(t)$ 值代入(8.16)。这种代换是可能的, 因为(8.16)容許由积分有限信号 $G(t)$ 而得到无限的輸出信号 $g(t)$ 。这种有限的信号可以在积分区间 $-\frac{\tau_0}{2} < t < +\frac{\tau_0}{2}$ 上用无限信号 $\frac{1}{W}g(t)$ 来代替。显然, 不能用方程(8.28)中的 $W G(t)$ 值来代替方程(8.16)中的 $g(t)$, 因为那样我們是用有限信号来代替无限信号。于是

$$\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} G(\tau) d\tau = g(t)$$

或

$$g(t) = \frac{1}{W} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} g(\tau) d\tau. \quad (8.29)$$

方程 (8.29) 是对输出信号 $g(t)$ 而得出的, 输入信号 $G(t)$ 则是在共存在区间 $-\frac{\tau_0}{2} < t < +\frac{\tau_0}{2}$ 上从 (8.28) 式得到。

因此, 我们得到了与当信号持续时间有限时、解决如何确定给定频带中有能量最大部分问题相同的积分方程 [参阅方程 (2.12)]。

这个结果十分有意义, 因为它指出, 占用最小频带的无限信号的形状, 与在给定频带中包含有最大能量部分的信号形状 (在其存在区间上) 是相同的。

下面来讨论信号的其他滤除情形, 即

1. 在滤波器 F_1 的输入端上加上有限持续 $\left(-\frac{\tau_0}{2}, +\frac{\tau_0}{2}\right)$ 的信号 $G(t)$; 在该滤波器的输出端上得到由角频带 $-\omega_0 < \omega < +\omega_0$ 所限制的信号 $g(t)$ 。

2. 限制器将信号 $g(t)$ 在区间 $-\frac{\tau_0}{2} < t < +\frac{\tau_0}{2}$ 界限以外的部分去掉。

3. 借助于与滤波器 F_1 有相同特性的滤波器 F_2 , 将信号 $g_2(t)$ 进行第二次滤除 (在限制器之后)。

我们来选择 $G(t)$, 使信号经过频率方面的滤除与时间方面的限制以后, 在其中所包含的能量是最大的。

引入 W' ——含能系数, 这能量是由于第一次滤除与在时间方面加以限制的结果而得到的, 即

$$W' = \frac{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g^2(t) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt}. \quad (8.30)$$

利用等式 (8.16), 将 (8.30) 右边部分分子中的积分表示为下列形式:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g^2(t) dt &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g(t) dt \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} G(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g_2(\tau) G(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (8.31)$$

式中

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\theta)}{\pi(t-\theta)} g(\theta) d\theta = \\ &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \left[\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\theta)}{\pi(t-\theta)} \cdot \frac{\sin \omega_0(\theta-\tau)}{\pi(\theta-\tau)} d\theta \right] G(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8.32)$$

由 (8.30) 与 (8.31) 可知

$$W' = \frac{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g_2(t) G(t) dt}{\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt}. \quad (8.33)$$

于是, (8.33) 的形式与在 (8.22) 中用 W' 代 W 和用 $g_2(t)$ 代 $g(t)$ 后的形式相同。因此, 所有对等式 (8.28) 的进一步论断, 对此处的情形仍有效, 亦即在范围 $-\frac{\tau_0}{2} < t < +\frac{\tau_0}{2}$ 内

$$g_2(t) = W' G(t). \quad (8.34)$$

将 (8.34) 中的 $G(t)$ 值代入等式 (8.32), 得到

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \frac{1}{W'} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \left[\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\theta)}{\pi(t-\theta)} \cdot \frac{\sin \omega_0(\theta-\tau)}{\pi(\theta-\tau)} d\theta \right] \\ &\quad \cdot g_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8.35)$$

由方程 (8.35) 所得到的 $g_2(t)$ 值和由方程 (8.34) 所得到的 $G(t)$ 值对应于按频率两次滤除的情形。同时, 在滤除及在时间方面加以限制以后, 信号含能系数将等于 W' , W' 应当由按 (8.31) 与

(8.34) 所获得的关系来确定:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g^2(t) dt &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} g_2(t) G(t) dt \\ &= W' \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} G^2(t) dt. \end{aligned} \quad (8.36)$$

我們来証明积分方程 (8.29) 与 (8.35) 具有同样的特征函数, 而与这些函数相对应的特征值用下列等式来联系:

$$W' = W^2;$$

換言之, 我們来証明, 如果 $\varphi(t)$ 为积分方程 (8.29) 的解, 亦即如果

$$\varphi(t) = \frac{1}{W} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau, \quad (8.37)$$

那末 $\varphi(t)$ 也是当 $W' = W^2$ 时的积分方程 (8.35) 的解, 亦即有

$$\varphi(t) = \frac{1}{W^2} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \left[\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\theta)}{\pi(t-\theta)} \cdot \frac{\sin \omega_0(\theta-\tau)}{\pi(\theta-\tau)} d\theta \right] \varphi(\tau) d\tau. \quad (8.38)$$

現在將 (8.38) 的右边加以变換, 变更一下积分次序并利用等式 (8.37):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{W^2} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \left[\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\theta)}{\pi(t-\theta)} \cdot \frac{\sin \omega_0(\theta-\tau)}{\pi(\theta-\tau)} d\theta \right] \varphi(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{W^2} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \left[\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(\theta-\tau)}{\pi(\theta-\tau)} \varphi(\tau) d\tau \right] \frac{\sin \omega_0(t-\theta)}{\pi(t-\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{W^2} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} W \varphi(\theta) \frac{\sin \omega_0(t-\theta)}{\pi(t-\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{W} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{\sin \omega_0(t-\theta)}{\pi(t-\theta)} \varphi(\theta) d\theta = \varphi(t). \end{aligned}$$

于是，我們证明了(8.38)的右边部分等于其左边部分，而等式(8.38)得证。因此，此处所提出的具有时间限制的二次滤除问题，化为与我們在本章开始所讨论的确定最佳信号形状问题相同的积分方程。

在§2.2中曾阐明，有限持续脉冲应当具有怎样的形状，才能在给定的频带中包含有频谱全部能量的最大部分。这里指出，经过按频率二次滤除与按时间加以限制的脉冲的形状，是由同样的积分方程来确定。

第九章 正规信号序列与随机信号序列频谱间的关系

本章将频谱表示为两个频谱函数的乘积的形式；可以称为形状因子的基本信号频谱，与今后将称之为重复因子的频谱

$$R(\omega) = \sum_{i=1}^{i=n} e^{-i\omega t_i}$$

对下面两种重要的特定情况计算了重复因子：1) 以相等时间间隔跟随的相同信号序列；2) 以随机时间间隔跟随的相同信号序列。

文中指出， $R(\omega)$ 是无限短脉冲的频谱。如果这些脉冲出现的时间是杂乱地分布的，那末， $R(\omega)$ 是白噪声频谱。

探讨了正规信号序列与随机信号序列频谱间的能量关系，也探讨了基本信号频谱间的能量关系。文中指出，如果频带宽度足够大，那末实际通信的频谱 $R(\omega)$ 的平均功率与 $R(\omega)$ 无关。计算了频带宽度，在一般电报情况下，以前的结论对这种频带宽度实际上是正确的。

§ 9.1. 初步概念

通常确定传输脉冲无线电信号所占用的频带宽度，是以具有相等的持续时间、经过同样时间间隔一个跟着一个的周期脉冲的序列

的頻譜为基础的(“电报点”)。在第六章中我們采用的就是这种方法。沿通路传输“电报点”来检验设备的作用是其实例。用这种简单的信号形状也能够很容易地确定干扰对模拟的接收机电路的作用。然而,在所有无綫电通信綫路的运用中,传输的并非“电报点”,而是实际的消息,这种消息是随机的信号序列。此外,由于“电报点”的研究方法使我們能够很容易地进行計算与測量,故应确定“电报点”頻譜与实际消息頻譜之間的关系。

如果能找出由同一发射机发出来的随机信号序列頻譜与正规信号序列頻譜之間的关系,那末研究互相干扰的理論問題可能得到簡化。

§ 9.2. 用在時間上推移的基本信号来表示消息

假定发射机滿足“叠加原理”,即,如果 $E(t)$ 为加在发射机輸入端上的、从时刻 $t=0$ 开始的基本信号,它在发射机輸出端上形成信号 $g(t)$,那末,在輸入信号 $E(t-t_1) + E(t-t_2) + \dots + E(t-t_n)$ 下,在輸出端上将形成信号 $g(t-t_1) + g(t-t_2) + \dots + g(t-t_n)$,而与 t_1, t_2, \dots, t_n 的次序无关时,“叠加原理”就算是滿足了。 E 变为 g 的变换具有可加的性质,且在加于正常工作的发射机的最大振幅界限內是綫性的。

对发报机來說,这个最大的振幅对应于 $E(t)$;基本信号一个跟随另一个,共总的最大振幅不超过基本信号的振幅。

对无綫电话发射机來說,最大振幅可能超过基本信号振幅若干倍。在这种情况下,如果基本信号 $E(t)$ 选得适当且足够小,則可能由在時間上有推移的有限信号序列 $E(t_1), \dots, E(t_n)$ 的叠加,来逼近任一給定的信号形状。在脉碼調制系統中,实际上实现了对传输信号的这种定量的展开形状。

为了表示按 t_1, t_2, \dots, t_n 時間順序所传输的消息,以后将认为基本信号 $g_i(t) = A_i g(t-t_i)$ 是已知的,这些时刻的順序是給定的。

如果将基本信号 $g_i(t)$ 的頻譜用符号

$$\Omega_0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g_i(t) dt, \quad (9.1)$$

来表示, 那末, 相应于在顺序时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 中所传输的消息的频谱将为

$$\begin{aligned} \Omega(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \sum_{i=1}^{i=n} A_i g(t-t_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} A_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g(t-t_i) dt. \end{aligned} \quad (9.2)$$

因为当 $t < t_i$ 时, 信号 $g(t-t_i)$ 中的每一个均等于零, 故

$$\Omega(\omega) = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \int_{t_i}^{+\infty} e^{-i\omega t} g(t-t_i) dt. \quad (9.3)$$

在(9.3)中作变量置换 $t = \theta + t_i$, 则有 $dt = d\theta$, 且

$$\Omega(\omega) = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \int_0^{\infty} e^{-i\omega(\theta+t_i)} g(\theta) d\theta.$$

于是

$$\begin{aligned} \Omega(\omega) &= \sum_{i=1}^{i=n} A_i \int_0^{\infty} e^{-i\omega\theta} e^{-i\omega t_i} g(\theta) d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} A_i e^{-i\omega t_i} \int_0^{\infty} e^{-i\omega\theta} g(\theta) d\theta \\ &= \Omega_0(\omega) \sum_{i=1}^{i=n} A_i e^{-i\omega t_i}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

由表示式(9.4)可以看出, 信号序列的频谱可以看作为下列两个频谱的乘积: 第一个为基本信号的频谱 $\Omega_0(\omega)$, 称为形状因子; 第二个为求和符号下的

$$R(\omega) = \sum_{i=1}^{i=n} A_i e^{-i\omega t_i}, \quad (9.5)$$

称为重复因子。

§ 9.3. 頻譜 $R(\omega)$

如同第三章中所指出，計算形状因子是不困难的，那末，我們現在來考慮重复因子 (9.5)，并在两种重要的特殊情形下來对它進行計算。

第一種情形 按相等時間間隔相跟随的同样信号的有限序列。

在其他一些随机信号中可能遇到这样的序列，因此，如同以后将要看到的一样，这种情形对由实验确定随机信号传输所占用的频带宽度來說是重要的。

我們來研究持續時間为 τ ，形状相同且隔相等的时间間隔 T (当 $\tau < T$ ；图 9.1) 发送的 n 个基本信号的有限序列頻譜。

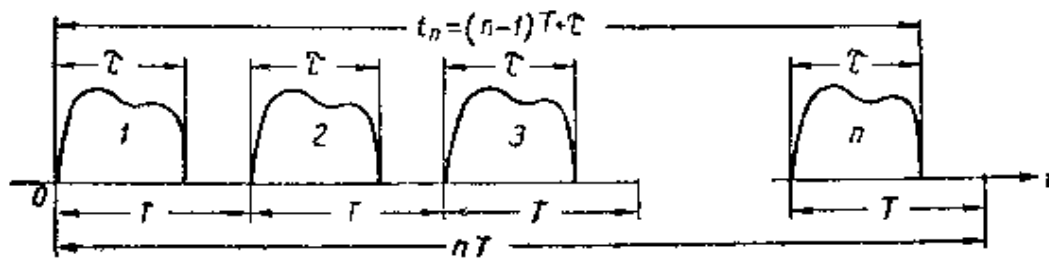


图 9.1 重复信号序列

每一个基本信号由表示式

$$g[t - (k-1)T]$$

來确定，其中 $0 \leq t - (k-1)T \leq \tau$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

在这种情况下， n 个信号序列由表示式

$$G(t) = \sum_{k=1}^n g[t - (k-1)T] \quad (9.6)$$

來确定，而頻譜用方程

$$\begin{aligned} \Omega(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \left[\int_0^{\tau} g(t) e^{-i\omega t} dt \right] \sum_{k=1}^n e^{-i(k-1)\omega T}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

来表示。

如同一般情形一样(9.4)，等距离信号序列的频谱(9.7)由形状因子与重复因子的乘积构成，并且在这种情形下，重复因子具有

$$\begin{aligned}
 R(\omega) &= \sum_{k=1}^n e^{-i(k-1)\omega T} \\
 &= \frac{\sin \frac{n\omega T}{2} e^{-i \frac{1}{2}(n-1)\omega T}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \quad (9.8)
 \end{aligned}$$

的形式。

当 $n > 1$ 时，函数 $R(\omega)$ 的图形为分布在 ω 轴上的无穷多个瓣的序列。

中心与角频率 $\omega_g = \frac{m2\pi}{T}$ (此处 $m = 0; \pm 1; \pm 2$ 等等) 相对应的瓣，将称为主瓣。主瓣彼此相同，它的最大纵坐标等于 n ，在 ω 轴所量得的宽度等于 $\frac{4\pi}{nT}$ 。与主瓣中心相对应的角频率 ω_g 的位置是固定的，且与信号数目 (n) 无关。

在两个相邻主瓣的中间有一些次瓣， n 愈大，次瓣的数目也愈多。它们在 ω 轴上的宽度等于 $\frac{2\pi}{nT}$ ，而最大的纵坐标值与相对于主瓣的位置有关。

图 9.2 上表示出一段曲线，这段曲线为 n 值等于 3、5 和 10 时重复因子的模 $|R(\omega)|$ ，这种曲线向横坐标轴的两端伸向无穷远处。由此图中可以看出，当 n 增加时，次瓣的相对数值减小，而当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n \frac{\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \quad (9.9)$$

如同有名的 δ 函数一样，表示式(9.9)具有过滤的效应，于是，

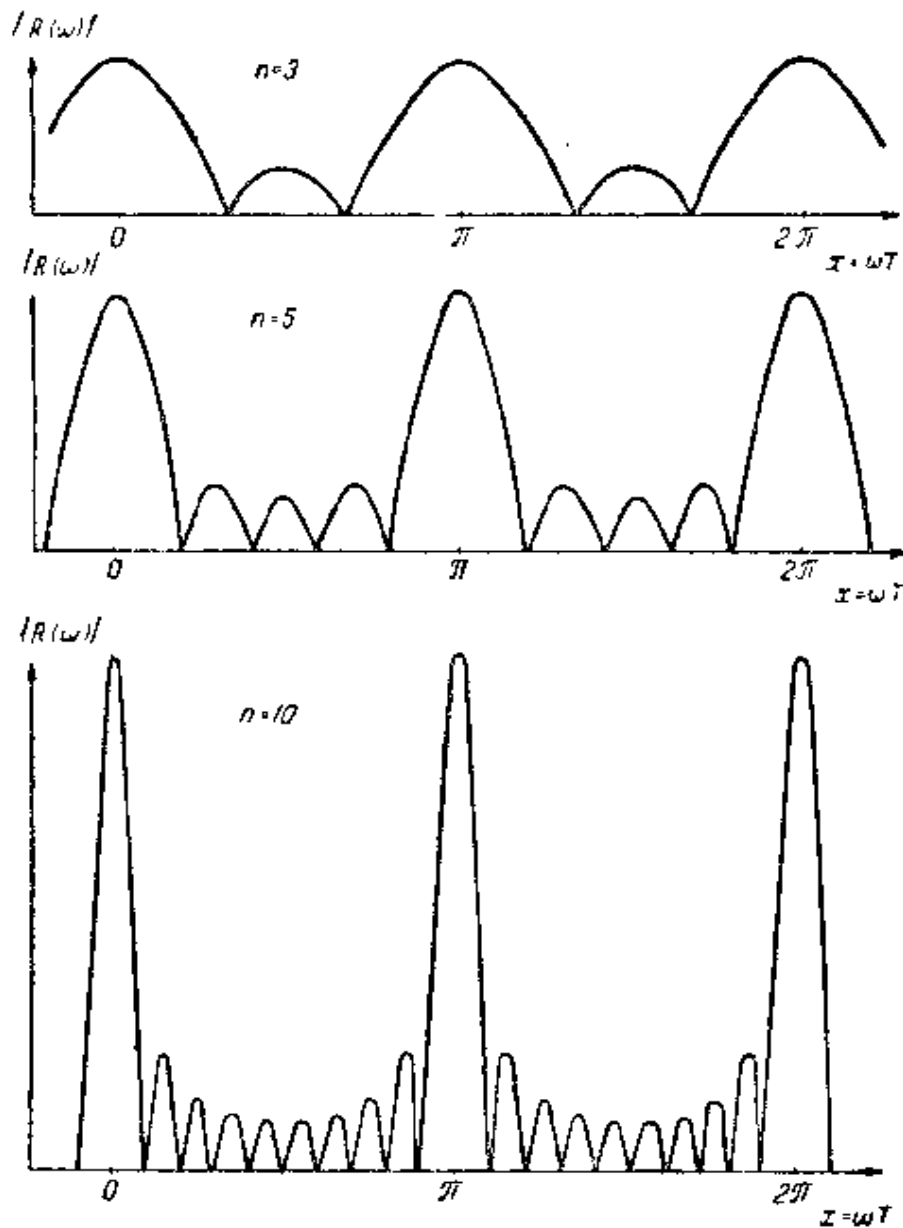


图 9.2 当 $n=3, 6$ 和 10 时函数 $R(\omega)$ 的图形

表示式(9.9)中当 $n \rightarrow \infty$ 的极限转换, 相当于由有限信号序列的连续频谱, 转换至周期重复信号的离散频谱。

第二种情形 按随机的时间间隔相跟随的同样信号的有限序列。

如果序列 t_1, t_2, \dots, t_n 是随机的, 那末对于每一个 ω 值, 重复

因子 $R(\omega)$ 为 n 个随机振幅矢量之和, 这些随机振幅矢量的相位杂乱地分布着。合成矢量的振幅的概率按关于随机位移[文献 15, 第 460 页]的著名问题那样来考虑。在我们所感兴趣的情况下, 即当所有分量的振幅等于 1 时, 合成振幅超过 r 的概率由表达式

$$r \int_0^{\infty} J_1(rx) J_0^n(x) dx. \quad (9.10)$$

来确定。

当 $n > 3$ 时, 积分(9.10)不能表示为已知的函数($r=1$ 的情形除外), 因而应当借助于不同的展开用数值积分来加以确定。在[文献 12]的工作中, 对于 2 与 12 之间的 n 值进行了详细的计算。在实际通信中, 通常有着大大超过 12 个的基本信号。然而计算表明, 当 $n > 10$ 时的振幅 $R(\omega)$ 的分布规律, 能够用对无穷多个分量有效的雷列规律(Закон Рэлея)很好地近似。

雷列规律的概率分布密度具有

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (9.11)$$

的形式。

如果研究归一化的重复因子

$$R_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} R(\omega), \quad (9.12)$$

那末, 可以采用变量

$$y = \frac{x}{\sqrt{n}}. \quad (9.13)$$

因为另一方面, 随机位移理论[文献 12]指出, $\sigma = \sqrt{\frac{n}{2}}$, 故归一化振幅 y 的概率分布密度具有

$$p(y) = 2ye^{-y^2} \quad (9.14)$$

的形式。

$y=0$ 的概率为 0。最大概率值 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。相应于所有的分量同

相位并按算术相加的情形的最大 y 值等于 \sqrt{n} 。这种情形的概率是微不足道的。

y 的均方值等于 1，而其平均值(数学期望值)等于 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。考虑了这点后，得到相当于我们讨论中的一种特殊情形的著名理论(该理论由恩·恩·安德列夫(H. H. Андреев)建立并证明)：如果脉冲一个接一个地跟随是无秩序的话，则脉冲序列的频谱与一个脉冲的频谱相一致。实际上，因为重复因子可以“平均地”看作是常量，那末，由方程(9.4)可以看出，足够长的无秩序地重复的信号序列频谱，由形状因子 $\Omega_0(\omega)$ 来确定。

§ 9.4. 相应于重复因子的信号

我们来阐明频谱 $R(\omega)$ 相应于甚么样的信号。为此，得出准确到只差一常数 $\frac{1}{2\pi}$ 的频谱 $R(\omega)$ 的傅里叶反变换

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n A_i e^{-i\omega t_i} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \sum_{i=1}^n A_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t_i)} d\omega, \end{aligned} \quad (9.15)$$

和式(9.15)中所包括的每一个积分均是发散的，然而对它可以作变换

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t_i)} d\omega = \int_{-\infty}^0 e^{i\omega(t-t_i)} d\omega + \int_0^{+\infty} e^{i\omega(t-t_i)} d\omega.$$

在所得到的第一个积分中作代换 $\omega = -\omega$ ，则

$$\int_{-\infty}^0 e^{i\omega(t-t_i)} d\omega = - \int_{+\infty}^0 e^{-i\omega(t-t_i)} d\omega$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{+\infty} e^{i\omega(t-t_i)} d\omega \\
 & = \int_0^{+\infty} [e^{i\omega(t-t_i)} + e^{-i\omega(t-t_i)}] d\omega.
 \end{aligned}$$

将最后这个积分表示为 (当 $S > 0$) 下列形式:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} [e^{i\omega(t-t_i)} + e^{-i\omega(t-t_i)}] d\omega \\
 & = \lim_{S \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} [e^{-S\omega + i\omega(t-t_i)} + e^{-S\omega - i\omega(t-t_i)}] d\omega \\
 & = \lim_{S \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-S\omega + i\omega(t-t_i)}}{-S + i(t-t_i)} + \frac{e^{-S\omega - i\omega(t-t_i)}}{-S - i(t-t_i)} \right] \\
 & = \lim_{S \rightarrow 0} \left[\frac{2S}{S^2 + (t-t_i)^2} \right]. \tag{9.16}
 \end{aligned}$$

在所得到的表示式中, 当 $t \neq t_i$ 时极限等于零, 而当 $t = t_i$ 时极限不存在。

为了对(9.16)式进行积分, 作变量置换 $t = t_i + S\theta$, 则当 $t = \pm\infty$ 时

$$\theta = \pm\infty; \quad dt = S d\theta \text{ 且}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{S \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2S}{S^2 + (t-t_i)^2} dt & = \lim_{S \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2S^2}{S^2 + S^2\theta^2} d\theta \\
 & = \lim_{S \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 d\theta}{1 + \theta^2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \theta \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi. \tag{9.17}
 \end{aligned}$$

关系式(9.16)与(9.17)确定着 $t = t_i$ 时的 δ 函数 (系数 2π , 在表示式(9.15)中被省略)。

由此可以写出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n A_i e^{i\omega(t-t_i)} d\omega = \sum_{i=1}^n A_i \delta(t-t_i). \tag{9.18}$$

于是, 频谱 $R(\omega)$ 为在时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 进行传输的无穷多个

短脉冲的頻譜。如果这些时刻的分布是无秩序的，那末 $R(\omega)$ 为分布在所有 ω 值上的均匀噪音頻譜。这就是頻譜 $R(\omega)$ 的物理意义。

在一般的电报系統中，时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 的分布不是随机的。首先，因为基本信号 $g(t)$ 不会重叠，这可以表示为条件

$$t_i - t_{i-1} = T \geq \tau = \frac{1}{B}. \quad (9.19)$$

的形式，式中 B 表示以波特計的电报速度。其次，在莫尔斯、博多电碼、电传打字机以及与它們相类似的設備的情况下，所有間隔 $t_i - t_{i-1}$ 为 $1/B$ 的倍数。可以认为，这些設備的信号相当于在时刻 t_i 上加上条件

$$t_1 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1} = T. \quad (9.20)$$

如果时刻 t_i 的数目有限且等于 n ，那末一般傳輸保持着条件 (9.20)。

§ 9.5. 各种頻譜的能量关系

如果 $g(t)$ 代表交流电流，且不考虑无因次的系数 $e^{-i\omega t}$ ，那末可以看出，确定 $\mathcal{Q}_0(\omega)$ 的积分 (9.1)，具有电量的因次。頻譜 $\mathcal{Q}(\omega)$ 的能量随着 $g(t)$ 的持續時間和 n 的增加而增加，这是因为在和式 $R_0(\omega)$ 中添加了新的正值部分。只有在把頻譜加以归一化，使它們的能量变得相同的情况下，才能比較与不同 n 值相对应的不同頻譜。

根据帕謝瓦利理論 (Теорема Парсеваля)，包含在頻譜 $\mathcal{Q}(\omega)$ 中的能量比例于

$$W^2 = \int_0^{+\infty} [g(t-t_1) + g(t-t_2) + \dots + g(t-t_n)]^2 dt. \quad (9.21)$$

頻譜振幅应当借系数 $\frac{1}{W}$ 加以归一化。如果所有基本信号完全彼此重叠，那末 W^2 达到它的最大值

$$W^2_{\text{最大}} = \int_0^{+\infty} n^2 g^2(t) dt = n^2 \int_0^{+\infty} g^2(t) dt. \quad (9.22)$$

如果信号不重叠（例如电报的情形），那末，所有相应于平方展开中二倍乘积项的积分均为零，从而 W^2 达到它的最小值

$$W^2_{\text{最小}} = \int_0^{+\infty} n g^2(t) dt = n \int_0^{+\infty} g^2(t) dt. \quad (9.23)$$

在一般电话及类似的情况下， W 可能与介于 n^2 和 n 間的任意一值成比例。在每次比較頻譜前，应当确定 W 的精确值。对于和式 $\sum g(t-t_i)$ 的平均值为零的一般无线电话，实际上容易使頻譜有一定的电平。这可从比較为在頻譜 $\Omega(\omega)$ 上加以常值項的載波电平得出，但为了写得简单起見，此处我們予以省略。

时刻 t_i 的分布是随机的情形的大多数通信中，轉換頻譜 $R(\omega)$ 在 $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ 窄頻带中的平均功率，可以按概率規律 (9.14) 二次矩与 $\frac{\Delta f}{2}$ 的乘积来确定。如同我們已經在前面証明的那樣， y 的均方值等于一，故在所研究的窄頻带中，轉換頻譜 $R(\omega)$ 的平均功率在数值上等于 $\frac{\Delta f}{2}$ 。在一般情况 (9.4) 下，頻譜 $\Omega(\omega)$ 的平均功率等于 $\Omega^2_0(\omega) \cdot \frac{\Delta f}{2}$ 。

这样，当同样的頻带宽度 Δf (Δf 的中心在同一角頻率 ω) 时，随机信号頻譜与单一基本信号 $g(t)$ 的頻譜的基本功率彼此相等。

下面我們再来研究由 n 个在時間 nT 中周期地重复的信号所构成的序列。現象的周期为 T ，而其頻率為 $\frac{1}{T}$ ；如果頻带 Δf 的宽度足够大，那末在該頻带宽度中的譜綫数目将等于 $\Delta f T$ 。这些譜綫中的每一条具有振幅 \sqrt{n} 。因此，在該頻带宽度 Δf 中轉換頻譜 $R(\omega)$ 的总能量为 $\frac{n}{2} \Delta f T$ ，而平均功率在数值上等于 $\frac{\Delta f}{2}$ 。

可見在周期信号的情形下，頻带 Δf 中的功率与前面所討論的随机信号和单一信号相同，在数值上也等于 $\frac{\Delta f}{2}$ 。当然，在頻带宽度

和对应于相邻两条谱线的频率差相比足够大的情形下，这种关系是正确的（即功率与频带宽度成比例）。

上面所得到的关系仅对下列两种情形是正确的：首先是当频谱借由方程（9.21）所确定的数值系数 W 加以归一化后才正确的情形。如果电报信号不相重叠，可以引入系数 \sqrt{n} 来将频谱归一化。实际上，如果利用同样的测量设备，而设备的时间常数考虑到同样的基本信号数目，且传输速度保持常值时，这种归一化是自动地实现的。在比较复杂的信号情形下（例如电话），只有在测量频谱分量的同时，借助于积分设备来测量由方程（9.21）式所决定的信号能量，并以适当的方式校正所得的结果后，才能对频谱的功率进行比较。

其次，当概率分布规律（9.14）的条件得到满足后，上述结果才正确。

下面我们将模的平方在频带 $\omega_2 - \omega_1$ 中进行积分，以便在更广泛的形式下，确定服从于雷列规律的随机信号功率。频带 $\omega_2 - \omega_1$ 中的能量等于

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} R(\omega)R^*(\omega)d\omega, \quad (9.24)$$

式中 $R^*(\omega)$ 表示 $R(\omega)$ 的共轭值。

而

$$\begin{aligned} R(\omega)R^*(\omega) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-i\omega t_i} \sum_{j=1}^n e^{+i\omega t_j} \\ &= 1 + \frac{2}{n} \sum_{i \neq j} \cos \omega(t_i - t_j). \end{aligned} \quad (9.25)$$

函数 $\cos \omega(t_i - t_j)$ 的数目等于 n 个中选取 2 个的组合数，亦即为

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

由于此处按条件 $t_i \neq t_j$ 和

$$\int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega = 0 \quad \text{当 } t \neq 0,$$

那末根据方程 (9.25), 頻譜 $R(\omega)$ 的平均功率将等于

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} R(\omega) R^*(\omega) d\omega &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{i \neq j} \cos \omega (t_i - t_j) \right] d\omega \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2}{n} \sum_{i \neq j} \int_0^{\omega} \cos \omega (t_i - t_j) d\omega \right] = 1. \end{aligned} \quad (9.26)$$

另一方面, 如同我們已經提到过的那样

$$\int_0^{\infty} 2y^{2+1} e^{-y^2} dy = 1. \quad (9.27)$$

比較 (9.26) 与 (9.27), 可以看出

$$\int_0^{\infty} 2y^{2+1} e^{-y^2} dy = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} R(\omega) R^*(\omega) d\omega. \quad (9.28)$$

于是我們证明了前面所采用的确定功率的方法所給出的結果是正确的。等式 (9.28) 系极限关系式, 因此, 对足够大的頻带寬度, 它实际上是正确的。由此可見, 如果頻带寬度足够大, 那末, 服从于規律 (9.14) 的重复因子的平均功率与 $R(\omega)$ 无关。

現在来定量地評定頻带的寬度, 对此而言, 在一般电报情形下, 实际可以认为前述的結論是正确的。对所研究的电报情形下

$$t_k - t_l \geq \tau(k-l) \quad \text{当 } k > l \text{ 和 } \tau = \frac{1}{B}. \quad (9.29)$$

由 (9.29) 可以看出,

$$\frac{1}{t_k - t_l} \leq \frac{1}{\tau(k-l)},$$

从而可以写出

$$\left[\frac{\sin \omega (t_k - t_l)}{t_k - t_l} \right] \leq \frac{1}{\tau(k-l)}. \quad (9.30)$$

如所周知^①

① 參閱 [文献 19, 第 16 頁]

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = C + \ln n + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}, \quad (9.31)$$

式中

$C=0.577216\cdots$ ——欧拉常数。

$$A_k = \frac{1}{k} \int_0^1 x(1-x)(2-x)(3-x)\cdots(k-1-x)dx;$$

$$A_2 = \frac{1}{12}, A_3 = \frac{1}{12}, A_4 = \frac{19}{80}, A_5 = \frac{9}{20};$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < \ln(n-1) + 1. \quad (9.32)$$

其次，按照 (9.25) 来估计积分 (9.24)

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} R(\omega) R^*(\omega) d\omega &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{i \neq j} \cos \omega(t_i - t_j) \right] d\omega \\ &= \omega_2 - \omega_1 + \frac{2}{n} \sum_{i \neq j} \frac{\sin \omega(t_i - t_j)}{t_i - t_j} \end{aligned} \quad (9.33)$$

根据 (9.30) 与 (9.33)

$$\begin{aligned} \omega_2 - \omega_1 + \frac{2}{n} \sum_{i \neq j} \frac{\sin \omega(t_i - t_j)}{t_i - t_j} &< \omega_2 - \omega_1 + \\ &+ \frac{2}{n} \left[\sum_{i > j} \frac{1}{\tau(i-j)} + \sum_{i < j} \frac{1}{\tau(j-i)} \right] = \\ &= \omega_2 - \omega_1 + \frac{4}{n\tau} \sum_{i > j} \frac{1}{i-j}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

因为

$$\sum_{i > j} \frac{1}{(i-j)} < n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \quad (9.35)$$

那末按照 (9.32)

$$\sum_{i > j} \frac{1}{(i-j)} < n [\ln(n-1) + 1]. \quad (9.36)$$

根据 (9.33), (9.34) 与 (9.36) 可以写出

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} R(\omega)R^*(\omega) d\omega < \omega_2 - \omega_1 + \frac{4}{v} [\ln(n-1) + 1]. \quad (9.37)$$

由 (9.37) 可以看出, 我们从 (9.28) 所作出的关于重复因子平均功率与 $R(\omega)$ 无关的结论, 在条件

$$\omega_2 - \omega_1 \gg \frac{4}{v} [\ln(n-1) + 1] \quad (9.38)$$

下是正确的。

不等式 (9.38) 可以改写为

$$\Delta f \gg \frac{2B}{n} [\ln(n-1) + 1] \quad (9.39)$$

的形式。

当 $n=10$, 求出 $\frac{\Delta f}{B} \gg 2$.

当 $n=100$, 求出 $\frac{\Delta f}{B} \gg 3.6$.

由此可以看出, 如果考虑到频带宽度通常是给定的话, 上述结论仅当足够短的通信下才是正确的。也应当考虑到, 结论 (9.39) 曾利用了不等式 (9.30), 而不等式没有考虑 (9.30) 左边部分的符号。因此, (9.30) 的右边可能比按计算出来的要小一些, 并且在实际的情形下, 可能用比由 (9.39) 所得到的的小一些的频带宽度值来满足。

此外, 在实际测量条件下, 仪表所计量的不是相应于传输消息的实际数目 n , 而是由测量仪表的时间常数所决定的非常少的数目。因此在测量时, 可能限于由仪表结构所决定的更小一些的频带宽度。

§ 9.6. 结 论

1. 可以将实际消息的传输, 表示为可化成较方便的频谱表示式的形式。频谱可以看作为两个频谱函数的乘积, 其中一个函数仅

与所采用的传输系统有关，而另一个函数与所传输的消息有关。如果消息完全是随机的，且延时足够久，后面这个关系相应于表征系统的基本信号的转换信号，并且具有白噪声频谱的形式。

2. 当频带宽度不太小时，相应于单个基本信号与周期重复的基本信号的频谱能量，沿同一频带上相同地分布着。

3. 相应于随机消息的频谱沿频带的能量分布，与上述一些频谱相同。

4. 如果信号并不是完全随机的，特别是如果它们的转换时刻是一定的（如同在一般电报系统中那样），那末，上述的关系只在频带宽度不太小，且用来测量能量的设备具有不太大的时间常数的情形下才是正确的。

5. 在比较频谱之前，应当化为同一标度（归一化）。在电报的情形下，借引入数值系数来归一化。在比较复杂的情况（例如电话）下，应当在每一个别情形下来测量信号的能量。

第十章 传输随机信号序列 占用的频带

本章讨论确定传输随机电报信号序列占用频带宽度时所发生的困难，并指出克服这些困难的途径为：

1. 建立周期信号序列频谱与随机信号序列频谱之间的关系。
2. 利用相关函数确定“平均的”频带宽度。

其次，根据两种形式的无线电报信号的能量频谱，计算了“平均的”频带宽度。计算表明，用这样的方式所确定的频带宽度，与信号分布规律密切相关。

§ 10.1. 确定传输随机信号序列占用频带宽度时所发生的困难

根据国际上有关建议[文献 40]，包含有被传输功率 99% 的频

带，定义为传输所占用的频带宽度。然而，当将此定义用于随机信号序列时，会发生一些困难，现在专门对此加以研究。

首先指出，在脉冲无线电信号作用下的接收机回路时间常数足够小时，可将信号分开来计算。换言之，信号间的时间间隔足够长，以致在接收下一个信号的时刻前，前一信号的作用实际上已等于零。

在这种条件下，包含有信号总功率 99% 的被占用频带宽度的界限，应当根据表示为傅里叶积分的连续频谱来确定。用这种方式所确定的理论上的频带，可以在许多情况下加以计算（参阅第二、三章）。然而，可以用来通过实验确定孤立信号连续频谱的设备还未实现；因此，不可能根据实验数据来精确地确定传输所占用的频带宽度。

既然直接由实验来研究连续的信号频谱是不可能的，那末，可以计算（参阅第六、七章）并通过实验来确定周期信号序列的离散频谱。

如所周知，在相应的频率下，傅里叶级数谱线 与信号的连续频谱的振幅成比例，但是从恢复连续频谱包络的观点来看，与重复频率有关的选定区间并不总是最佳的。此外，所占用频带的界限很少精确地与离散频谱的谱线相重合，它可以在每一边以相差一根谱线的精确度来加以确定，也就是说，四种重复频率那样的不精确性总是可能的。在两根谱线间的任何插入法均有困难，因为能量在连续频谱与线状频谱中的分配是不相同的。

无论如何，将包含在傅里叶级数每一条谱线中的功率相加起来达到总功率的 99%，可以比较方便地近似确定实际传输所占用的频带宽度。

然而，这种近似方法用在持续时间与出现时刻均是随机的信号下是有困难的。问题在于，当传输这种信号时，总辐射功率在传输过程中是变化的。例如，对于莫尔斯电码的矩形信号来说，天线中的均方电流值由 $0.707 J_{\text{最大}}$ （对点而言）变化至 $0.866 J_{\text{最大}}$ （对划

而言)，亦即大了20%。由此可見，包含有輻射總功率99%的傳輸所占用頻帶寬度，在傳輸過程中總是變化的，因此，上述國際上有關建議的頻帶寬度定義在這種情形下不適用。

於是，應當尋求新的方法和定義，這些方法和定義在原則上應能給出距理論值偏差不太大的結果，並能夠用於實際。在這方面可以指出兩條途徑：

1. 確立周期信號序列頻譜與隨機信號序列頻譜之間的关系，以便能確定以多么簡單的周期信號序列的研究方法能接近於實際通信的頻譜。在第九章中我們確立了兩個有實際意義的、特殊情況下的這種关系。

2. 借相關函數來確定隨機信號序列的能量頻譜。

由於無論是傅里葉級數與傅里葉積分，都不適用於給定在 $-\infty < t < +\infty$ 上的非正規信號，那末，不可能找出對應於長時間不固定的被傳輸隨機信號序列的函數的頻譜密度；對隨機信號而言，頻譜密度在其一般含義下的概念喪失了原有的內容。在這種情形下，通常是引入隨機函數的均方（對時間）頻譜密度的概念，或者將此特性簡稱為函數 $G(t)$ 的能量頻譜。能量頻譜可以由相關函數來得到，因為在這兩個特性之間根據著名的希契定理是有聯系的。在[文獻44]中，詳細地研究了各種不同隨機脈沖過程的能量頻譜。利用能量頻譜可以確定傳輸所占用頻帶的“平均”寬度。

能量頻譜的意義比非周期信號頻譜密度的意義更有限一些；根據能量頻譜所確定的頻帶“平均”寬度，在許多情況下將比相應於基本信號的真正寬度（從波道間干擾的觀點來看是最危險的）要小一些。此外，按照能量頻譜，不能象按照非周期信號的頻譜密度那樣將原來函數恢復。然而，確定頻帶的“平均”寬度常常是最簡單的，因為在多數情形下，相關函數可以用分析或實驗的方法加以確定。

§ 10.2. 借相關函數來確定頻帶寬度

現在來研究採用莫爾斯電碼的手控電報傳輸，此時矩形點、划

与它们之间的间隔彼此不相等。在这种条件下，点与划的随机出现不一定是等持续时间，因而很好地与实际的条件相符合。于是，我们将具有下列形式的电报传输，在这种传输下，信号或者等于+1，或者等于-1，并且传输以某一平均的速度进行，我们将这种速度表示为波特，并用符号 B 表示。与传输相对应的函数，将在事件的无穷序列中或者取+1值，或者取-1值，而事件在单位时间中以平均出现频率 B 随机地发生着。

在[文献26]中确定出这种传输的相关函数

$$\psi(u) = e^{-2Bu}, \quad (10.1)$$

并且指出，函数的能量频谱具有

$$R_p(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{2B}{4B^2 + \omega^2} \quad (10.2)$$

的形式。

确定由0至 ω 的频带中所包含的相对功率的函数 $\theta(\omega)$ ，用公式

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{2B}{4B^2 + \omega'^2} d\omega' \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2B} \end{aligned} \quad (10.3)$$

来表示，并且取传输的总功率的值为1。

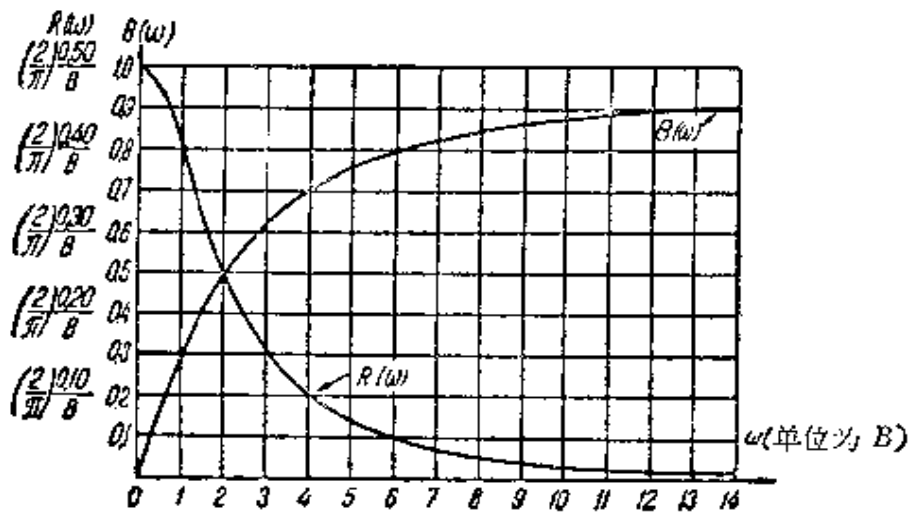
在图10.1中表示出函数 $\theta(\omega)$ 以及此函数对 ω 的导数——亦即 $R(\omega)$ 。借函数 $\theta(\omega)$ ，可以确定信号在传输时所占用的频带宽度。为此，将方程(10.3)的右边部分与数值0.99相等起来：

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2B} = 0.99.$$

因为 ω 确定着由零算起的角频带宽度，那末 $\omega = 2\pi \Delta f$ ，此处 Δf ——传输频带的宽度；由三角函数表找出

$$\Delta f \approx 18B. \quad (10.4)$$

如同在第六章中所指出，当以速度 B 来传输周期矩形信号序列时，传输所占用的频带宽度为

图 10.1 $\theta(\omega)$ 与 $R(\omega)$ 的图形

$$\Delta f = 21 B. \quad (10.5)$$

比較公式 (10.4) 与 (10.5) 可以看出, 所作的关于容許点与划的随机出現不一定有相等的持續时间的假定, 导致出比用周期信号序列所得到的要窄一些的頻帶宽度。

所研究的方法也可以推广至其他的电报工作形式。特别是对一些其他类型的随机电报信号的分析是很有意义的。时间軸分为相等持續时间的間隔 τ 。在任意选定的間隔中, 信号值与其他区間中的值无关, 且等于 +1 或 -1 的概率相等。

这种类型电报信号的能量頻譜等于 [文献 26]

$$R(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2B} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2B}}{\frac{\omega}{2B}} \right)^2. \quad (10.6)$$

函数 $\theta(\omega)$ 用公式

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2B} \int_0^{\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{2B}}{\frac{\omega}{2B}} d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{2B}{\omega} \sin^2 \frac{\omega}{2B} + \text{Si} \frac{\omega}{B} \right] \end{aligned} \quad (10.7)$$

求表示。

引入符号 $k = \frac{\omega}{2B} = \frac{\omega \tau}{2}$ ，則公式 (10.7) 具有

$$\theta(k) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{k} \sin^2 k + \text{Si } 2k \right) \quad (10.8)$$

的形式。

比較公式 (10.8) 和公式 (3.7) 可以看出，对所研究的随机信号序列而言，脉冲能量沿頻带的分布，以至所占用的頻帶寬度，均將和傳輸矩形脉冲时一样。

所得出的結果表明，如果对第一种形式的随机信号來說，我們从公式 (10.4) 中可以看出，它和傳輸周期信号序列比較起来，頻帶寬度有一些減少，那末对第二种形式的信号來說，就看不到这种減少。于是，頻带的“平均”寬度定义表明，它的值与信号的分布規律有关。

第十一章 傳輸随机信号序列时无 綫电通信波道間相互干扰的減低

本章討論研究相互干扰問題的可能方法，并且指出，如果將实际的通信表示为时滯函数序列，那就可簡化对它們性质的分析。

指出表示为延迟函数級数形式的信号的能量頻譜，是两个譜函数的乘积：第一个譜函数为基本信号的能量頻譜；而第二个譜函数为脉冲轉換的能量頻譜。

根据对时滯的相关与不相关信号序列的能量頻譜的研究，确定了傳輸随机信号序列时減低干扰的可能性。特別指出，在这种条件下減低相互干扰——就意味着寻求基本信号，使得用該种系統进行傳輸时，將形成最小能量的干扰。

§ 11.1. 研究相互干扰問題的可能方法

在一个頻带中能够配置的波道数目，与相邻波道間必需的頻差

有关，而这个頻差則由波道間的相互干扰来决定。类似場强波动的現象，会引起进一步加大頻差的必要性。

相互干扰与輻射所占用的頻帶寬度有关，从而与有效傳輸所占用的頻帶的能量分布有关。然而，为了确定相互干扰，知道傳輸占用頻帶中的能量分布是不够的，还必須知道帶外輻射能量的减低規律。

于是，为了减低无綫电通信波道間的相互干扰，必須减小輻射所占用的頻帶寬度，并增加帶外輻射的减低速度，亦即必須利用与整个通信頻譜有关的一些数据。

然而，即使我們有了这些数据，对解决互相干扰問題还是不够的，因为它与干扰輻射的形式和遭受干扰的接收机所应当接收的有效輻射的形式密切相关，同样也与該接收机的特性密切相关。詳細的命题使得問題的解决过于复杂化，因为通常不可能完全考虑所有的作用因素。因此，必須考虑实际条件，采用比較简单但足够普遍的形式。

通常干扰是在实际傳輸信息时由輻射所产生的。因此，在研究这些問題时所用輻射表示方法，应当容許将被傳輸的信号看作为随机量的形式。

如果信号表示为函数序列的形式，实际信号的性质就比較容易分析。为了闡明信号的随机特性以及研究互相干扰的問題，利用实际信号表示为时滯函数序列的形式是特別有利的。

于是，对于許多类的輻射而言，可以在輻射无綫電信号与加在調制器輸入端上的信号之間，建立起简单的关系。

如果将預定要傳輸的信号（例如电报中的情形）表示为一組不連續的电压形式，那末，不难將它們表示为时滯函数序列的形式。同时，如果确定了通常表示为調制載頻的脉冲形式的基本信号，那末輻射就完全被确定了，而基本信号的参数（振幅、頻率、持續時間等）之一，具有与原来信号的离散的与随机的电压成比例的系数。

在另外的情况下（最简单的例子是电话），信号由连续的时间函数来确定，且可借改变与基本信号有关的参数之一（如确定信号的连续参数的函数）而利用同样的方法。

在第九章，我们为了表示实际的消息，曾利用基本信号的时滞序列的振幅频谱（傅里叶变换），并建立了正规信号序列与随机信号序列之间的关系。本章指出，在研究减低互相干扰的问题时，利用时滞信号序列的能量频谱，可以作出一系列对各种实际情形有价值的结论。

§ 11.2. 表示为延迟函数级数形式的信号的能量频谱

假定信号表示为延迟函数级数的形式

$$G(t) = \sum_{i=-n}^n A_i g(t-t_i). \quad (11.1)$$

求出函数 $G(t)$ 的能量频谱：

$$\begin{aligned} \Omega_g(\omega) &= \lim_{nT \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-nT}^{+nT} G(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \\ &= \lim_{nT \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \Omega(\omega) \cdot \Omega^*(\omega), \end{aligned} \quad (11.2)$$

此处 $\Omega(\omega)$ ——函数 $G(t)$ 的傅里叶变换； $\Omega^*(\omega)$ —— $\Omega(\omega)$ 的共轭表示式；而 T ——脉冲间的时间间隔。

在第九章曾指出

$$\Omega(\omega) = \Omega_0(\omega) \sum_{i=-n}^n A_i e^{-i\omega t_i}, \quad (11.3)$$

式中

$\Omega_0(\omega)$ ——基本信号的频谱。

因此

$$\Omega_g(\omega) = \lim_{nT \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \Omega_0(\omega) \Omega_0^*(\omega) \sum_{i,k=-n}^n A_i A_k e^{-i\omega(t_i - t_k)}. \quad (11.4)$$

因为 T 是有界的，故(11.4)可以表示为下列形式：

$$\begin{aligned}
\Omega_s(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \Omega_0(\omega) \Omega_0^*(\omega) \sum_{i,k=-n}^n A_i A_k e^{-i\omega(t_i-t_k)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Omega_0(\omega) \Omega_0^*(\omega) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i,k=-n}^n A_i A_k e^{-i\omega(t_i-t_k)} = \\
&= \frac{1}{T} \Omega_0(\omega) \Omega_0^*(\omega) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i,k=-n}^n A_i A_k e^{-i\omega(t_i-t_k)} = \\
&= \Omega_{s0}(\omega) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i,k=-n}^n A_i A_k e^{-i\omega(t_i-t_k)}, \quad (11.5)
\end{aligned}$$

式中 $\Omega_{s0}(\omega) = \frac{1}{T} \Omega_0(\omega) \Omega_0^*(\omega)$ —— 单个脉冲的能量频谱。

于是，由(11.5)可以看出，表示为延迟函数级数形式的信号的能量频谱，为两个谱函数的乘积：第一个谱函数为 $\Omega_{s0}(\omega)$ —— 它是基本信号的能量频谱，而第二个谱函数具有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=-n}^n A_i e^{-i\omega t_i} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=-n}^n A_k e^{+i\omega t_k} \right],$$

的形式。

考虑到公式(9.5)与(9.12)，可以将上式写为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_0(\omega) R_0^*(\omega) = R_{s0}(\omega), \quad (11.6)$$

式中

$R_0(\omega)$ —— 脉冲转换的归一化频谱(重复因子)，

$R_{s0}(\omega)$ —— 脉冲转换的归一化能量频谱。

§ 11.3. 不相关信号的频谱

在一般的电报系统中，时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 的分布不是随机的，其原因如下。

首先，基本信号不相重迭，这可以用条件

$$t_i - t_{i-1} = T \gg \tau = \frac{1}{B} \quad (11.7)$$

的形式来表示。

式中

B ——表示为波特的电报速度；

而 τ ——基本信号的持续时间。

其次，在莫尔斯、博多电码、电传打字机以及类似的设备中，所有的间隔 $(t_i - t_k)$ 为 $\frac{1}{B}$ 的倍数。可以认为，在这些设备中，对信号出现时刻可加上条件

$$t_i - t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1} = T, \quad (11.8)$$

如在 § 9.4 中所指出，信号

$$G(t) = \sum_{i=-n}^n A_i \delta(t - t_i), \quad (11.9)$$

对应于脉冲转换频谱 $R_0(\omega)$ 。

为了求出信号 (11.9) 的自相关函数 $\psi(u)$ ，我们引入辅助函数 $G_n(t)$ 与 $\psi_n(u)$ ：

$$G(t) = \begin{cases} G(t) & \text{当 } 0 \leq t \leq nT \\ 0 & \text{当所有 } \begin{cases} t > nT \\ t < 0 \end{cases} \end{cases}, \quad (11.10)$$

$$\begin{aligned} \psi_n(u) &= \frac{1}{nT} \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(t) G_n(t+u) dt \\ &= \frac{1}{nT} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-n}^n A_i \delta(t - t_i) \sum_{i=-n}^n A_i \delta(t - t_i + u) dt = \\ &= \frac{1}{nT} \sum_{i,i=-n}^n A_i A_i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_i) \delta(t - t_i + u) dt. \end{aligned} \quad (11.11)$$

利用 δ 函数的著名关系式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_1) dt = f(t_1), \quad (11.12)$$

得到

$$\psi_n(u) = \frac{1}{nT} \sum_{i, l=-n}^n A_i A_l \delta(t_i - t_l + u). \quad (11.13)$$

在(11.13)中作置換 $t_i = iT$, 則有

$$\psi_n(u) = \frac{1}{nT} \sum_{i, l=-n}^n A_i A_l \delta[(i-l)T + u]. \quad (11.14)$$

由(11.14)可見, 只有在 u 为 T 的倍数的点, $\psi_n(u)$ 才异于零。

我們求出, 当 $n \rightarrow \infty$ 时函数 $\psi_n(u)$ 所趋的极限, 即为信号(11.9)的自相关函数 $\psi(u)$:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{i, l=-n}^n A_i A_l \delta[(i-l)T + u] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \left\{ \sum_{i=-n}^n A_i^2 \delta(u) + \sum_{\substack{i, l=-n \\ \text{当 } i \neq l}}^n A_i A_l \delta[(i-l)T + u] \right\} = \\ &= \delta(u) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{i=-n}^n A_i^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{i, l=-n}^n A_i A_l \delta[(i-l)T + u]. \quad (11.15) \end{aligned}$$

根据著名的希契定理, 信号(11.9)的能量頻譜将等于

$$\begin{aligned} R_{s0}(\omega) &= 4 \int_0^{\infty} \psi(u) \cos \omega u du \\ &= 4 \int_0^{\infty} \left\{ \delta(u) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{i=-n}^n A_i^2 \right. \\ &\quad \left. + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{i, l=-n}^n A_i A_l \delta[(i-l)T + u] \right\} \cos \omega u du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{nT} \sum_{i, l=-n}^n A_i^2 \int_0^{\infty} \delta(u) \cos \omega u du \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{nT} \sum_{i, l=-n}^n A_i A_l \int_0^{\infty} \delta[(i-l)T + u] \cos \omega u du. \quad (11.16) \end{aligned}$$

或者, 由于 $\int_0^{\infty} \delta(u) \cos \omega u du = 1$, 且考虑到(11.12), 結果得到

$$R_{s_0}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{nT} \sum_{i=-n}^n A_i^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{nT} \sum_{i=-n}^n A_i A_1 \cos \omega(i-i)T. \quad (11.17)$$

(11.17) 右边的第一项为不相关信号的平均功率。只有当 (11.15) 右边的第二项为零时, (11.17) 右边的第二项才恒为零。(11.15) 右边的第一项与转换时刻无关, 而第二项只在 $\pm T$ 的倍数点上不等于零。如果用公式 (11.15) 表示的自相关函数 $\psi(u)$ 周期地 (经过周期 T) 等于零, 那末公式 (11.15) 右边仅剩下第一项。在这种情况下, 从 (11.15) 右边第二项所得到的 (11.17) 式右边第二项也等于零, 从而信号 (11.9) 的频谱将只包含与频率无关的部分。

由 (11.5) 可看出, 延迟函数级数的能量频谱可以表示为两个谱函数乘积的形式。第一个谱函数 $\mathcal{Q}_{s_0}(\omega)$ 为基本信号的能量频谱; 而由公式 (11.17) 可以看出, 第二个谱函数等于 $R_{s_0}(\omega)$ 。如果自相关函数 (11.15) 周期地取得零值, 并且周期等于划分开两个相接續转换时刻的时间, 那末, 作为某个信号 (11.9) 的相关函数的傅里叶变换的第二个谱函数等于常量。在这种情形下, 信号序列的频谱与基本信号的频谱一致, 从而使互相干扰的确定简化: 由遭受干扰的接收机输出端上的平方积分器直接地给出接收机所接收的能量。

当具有十分窄的频带的接收机调谐在距频谱中心相当远的频率时 (该处基本信号的频谱一般随着频率作十分缓慢的变化), 接收滤波器分出在整个滤波器频带中接近于常值电平的频谱部分。

如果信号序列不仅是不相关的, 而且除此之外, 基本信号在转换时刻取得独立的数值, 那末, 可以证明 [文献 25, 第 513 页], 作用于遭受干扰的接收机输出端上的信号为高斯“白”噪声。于是作用的唯一结果, 在于增大了遭受干扰的接收机输出端上的噪音电平。当给定频带中具有相等的能量时, 这个干扰使所研究的波道的通过能力受到最大的损失。

§ 11.4. 相关信号的频谱

如果信号在轉換时刻彼此相关，那末，如由公式 (11.17) 可見，在与頻率无关的信号平均能量上，附加有与頻率有关的項。

如果象在不相关信号情形一样，接收机具有十分窄的通頻帶，且調諧在距頻譜中央部分相当远的頻率上。那末研究上述附加項对接收机的作用是十分有意思的。当調諧頻率远离信号的平均頻率时，加在滤波器中的能量将周期地变化着；当接收机的頻帶寬度改变时，該能量也将周期地变化着。

因此在相关信号情形下，接收机上所檢驗出来的干扰值，不仅与信号的統計性质有复杂的依从关系，而且与接收机的特性，特别是接收机的頻帶寬度有复杂的依从关系。

§ 11.5. 結 論

1. 接收机上的干扰作用不仅与从干扰台所得到的能量有关，而且与被傳輸消息的統計特性以及接收机的类型有关。

2. 如果接收机調諧在距干扰頻譜中心足够远的頻率上，且可以将它的通頻帶看作为矩形时，那末，在不相关的信号序列下，干扰台的作用是容易确定的。此外，如果干扰信号具有独立的振幅，那末干扰与热噪声相类似。干扰增大了波道的固有噪声，并使波道通过能力受到最大的損失。

3. 如果信号序列不相关，那末它的频谱可以直接与用同一傳輸系統傳輸的基本信号的频谱相比拟。

4. 在相关信号序列的情形下，频谱相对于基本信号的频谱而波动着。这种波动与接收机的特性有复杂的依从关系（特别是当接收机的通頻帶較寬时）。

在这种情况下，为了測量傳輸的干扰作用，最好或者将此信号用調制发射机的“白”噪声来代替（对无綫電話发話机），或者用周期的信号序列来代替（对无綫电报发报机）。

5. 减低干扰的能量,可化为寻求用同一系统进行传输下,产生能量最小的干扰的基本信号。

第十二章 利用振幅、频率或相位 调制的无线电通信系统间 的相互干扰

本章讨论在具有振幅、频率与相位调制的无线电通信系统中,辐射的类型,特别是辐射的频谱形状与接收机的选择特性,对相互干扰的电平的影响。

确定了在信号频谱的各种减低陡度值 P_U 与接收机选择性曲线陡度 P_R 下的互相干扰电平。

指出如果 P_U 与 P_R 的渐近陡度彼此相等,则无线电通信系统中的相互干扰最小。

导出了干扰辐射的功率与其最大振幅之间的关系,由这些关系可以看出,当失调足够大时,干扰信号的功率与其最大振幅的平方成比例,且这个关系与失调的大小没有依从关系。

§ 12.1. 原始假定

下面的讨论是以这样的概念为基础,即互相干扰的来源,是在发射机与接收机需用频带所包含的频率中,或者在远离这些频带界外的频率中,发射机所发射的能量与接收机所接收的能量。

假定有调谐在频率 f_0 的接收机与发射载频 $f_T = f_0 + \Delta f_0$ 的发射机,并且信号按振幅、频率或相位进行调制。现将这些设备的组合以图 12.1 上的方框图表示,并分别研究这些元件中每一个的、以及整个通信系统的性质。

在完善的调制器输出端上所得到的信号的一般形式为

$$u_m(t) = M(t) \cos [2\pi f_T t + \varphi(t)], \quad (12.1)$$

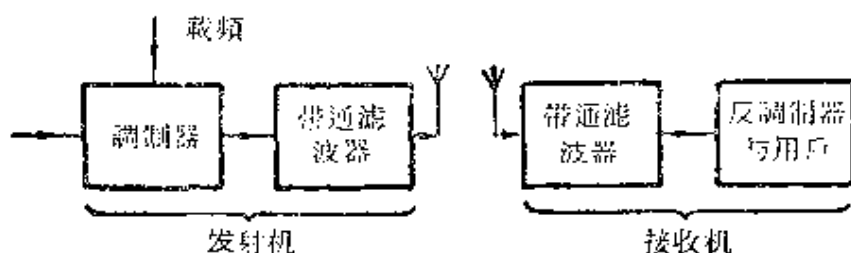


图 12.1 無線电通信系統的等效綫路图

式中 $M(t)$ ——按振幅調制的函数；

$\varphi(t)$ ——按頻率或相位調制的函数。

从本身特性来看，这两个函数的变化和 $\cos 2\pi f_T t$ 比較起来是較慢的，因此，包含有頻譜能量主要部分的頻帶寬度和 f_T 比較起来是很小的。

假定此信号带外輻射的能量頻譜平均以每倍頻 ρ_m 分貝的速度降低。

其次，假定被发射信号的形式为

$$u(t) = \sum_{n=1}^n M_n(t) \cos [2\pi f_T(t) + \varphi(t)]. \quad (12.2)$$

尽管通常工作于“C”类状态的发射机的高頻級产生載頻的諧波，这些諧波沒有完全被发射机輸出回路所消除，但是发射信号的基波分量

$$u_1(t) = M_1(t) \cos [2\pi f_T t + \varphi_1(t)] \quad (12.3)$$

与 (12.1) 的差別很小。这个差別由发射机低頻級与高頻級的选择性和非綫性性质以及調制回路的时间常数来确定。因为我們研究的偏差 Δf_0 和 f_0 比較起来是較小的，故可以忽略載頻的諧波，且对被輻射信号 (12.1) 与其基波分量 (12.3) 不加以区别。

如果 $M_1(t)$ 与 $M(t)$ ，以及 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi(t)$ 不是絕對一样的，那末，它們的信号頻譜会彼此有些差別。我們假定，这个差別将特別表现在它們带外輻射的区域中，并且在每倍頻上等于 ρ_v 分貝的信号 (12.3) 頻譜的平均衰减将超过 ρ_m 。这就意味着，发射机可以

用选择性曲线来表征，此曲线的平均渐近陡度等于

$$p_T = p_U - p_m, \quad \frac{\text{分贝}}{\text{倍频程}} \quad (12.4)$$

如图 12.1 上所表示的那样，借滤波器 F_T 可引入这种选择性。

其次假定，接收机在共通频带界外的选择性曲线趋于每倍频 p_R 分贝的常值陡度，并且通频带宽度近似地等于辐射信号(12.3)所占用的频带宽度。

以后还要假定，接收机的高频级与中频级有足够的线性，以便对它们可以用将选择性统一起来的线性滤波器 F_R 来表征。

最后，假定反调制器是线性的，或者确切一点说，在计算时不考虑反调制器。

§ 12.2. 各种不同失调下相互干扰能量的变化

在频率标度上以同样的比例尺绘制出接收机的选择性曲线和干扰能量频谱的包络线(图 12.2)。用 W_R 表示该频谱中紧靠频率 f_0 的分量的能量主要部分。用 W_K 表示加于接收机通频带中的干扰频谱分量的能量。

现在来研究，当偏差 Δf_0 增大时，接收机所接收到的能量作怎样的变化。

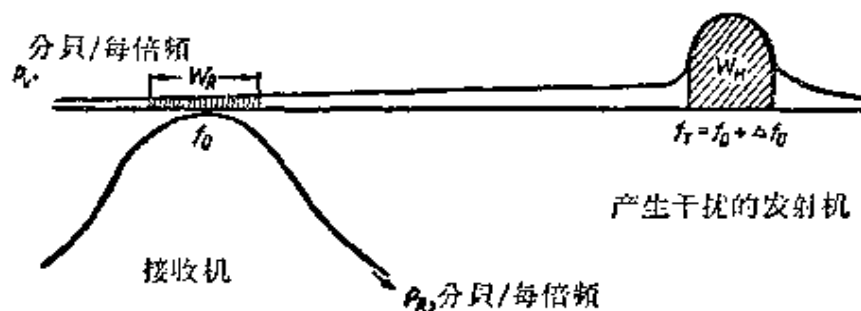


图 12.2 接收机选择性曲线与干扰信号频谱的相对位置

考虑到在滤波器 F_R 输出端上的干扰能量频谱，是用于扰信号频谱每一分量与由接收机选择性曲线所确定的相应衰减相乘而得到的，可以直接从图 12.2 得出如下关系：

1) 如果 $p_U < p_R$, 那末当 Δf_0 增大至超过某一值时, 分布在靠近接收机调谐频率 f_0 的频谱分量的作用占优势。接收机所接收的能量则近似地等于 W_R , 而表征能量随 Δf_0 而变化的曲线, 趋于每倍频 p_U 分贝的陡度。

2) 如果 $p_U > p_R$, 那末当 Δf_0 增大至超过某一值时, 分布在靠近被发射信号载频 f_T 的频谱分量占优势。接收机所接收的能量接近于 W_U , 且能量的变化曲线具有每倍频 p_R 分贝的陡度。被发射的信号就好像频谱有限的信号一样地作用于接收机上。此时 p_R 值对相互干扰电平有很大的影响。

3) 如果 $p_U = p_R$, 那末很难确定 W_U 或 W_R 的影响孰占优势, 因此, 应当整个地研究通信的频谱。把这种情形看作为其他两种情形的分界线, 可作出如下结论, 即接收机接收的能量的变化曲线, 趋于每倍频 $p_U = p_R$ 分贝的陡度。

因此, 表示接收机接收能量变化的曲线的陡度 p_W (与偏差 Δf_0 有关), 满足关系式

$$p_W = \begin{cases} p_U & \text{当 } p_U \leq p_R \\ p_R & \text{当 } p_U \geq p_R \end{cases}. \quad (12.5)$$

关系式(12.5)十分重要, 因为它指出了通过甚么途径可以减低互相干扰, 从而在相邻波道间有较小差值下可以工作。为此, 应当使得发射机的带外辐射以不低于接收机选择性曲线陡度的速度减低, 当然, 此时不要使接收机的选择性变坏。目前所存在的一些通信系统就这方面来看还极不完善, 即不满足此种要求。当前, 许多专用接收机的选择性曲线的渐近陡度超过每倍频 60 分贝, 而某些无线电发射机的带外辐射平均减低速度仍为每倍频 12 分贝左右。因此, 在构造发射机时, 应当增大带外辐射减低的速度。

上面所讨论的关系式是从假定接收机对于干扰辐射的能量敏感而得到的。然而, 也可能存在这样一种通信系统, 它们的接收装置对信号的能量不敏感, 而是对信号的形状敏感。例如, 电报接收设备对加在其输入端上的电压形状敏感, 且它当此电压达到一定的大小

时发生动作。在这种情况下，宜将接收机对无线电报发送起反应的最大振幅和相应的接收能量联系起来。这就使得我们能够判定，一般的能量准则是怎样和振幅准则通用和对照的。

在下一节中，我们来讨论经过滤波器 F_R 传输的信号的最大振幅 A 和能量 W 之间的关系。

§ 12.3. 通过与接收机等效的滤波器 F_R 发送的信号最大振幅 A 和能量 W 之间的关系

为了确定这个关系，我们利用如下的方法：

1) 假定发射机在时间间隔 t_1 至 t_2 中，传输着形式为

$$u(t) = M(t) \cos [2\pi f_T t + \varphi(t)] \quad (12.6)$$

的信号，而在时刻 t_1 以前和时刻 t_2 以后，发射机不发射。

2) 求出与被传输的信号 $u(t)$ 相对应的频谱函数 $\varrho(f)$ 。

3) 在前面一节中，我们近似地确定了频带的界限，在这个频带中包含有不能忽略其对接收机的作用的分量 $\varrho(f)$ 。这个频带与干扰带外辐射频谱减低速度 ρ_T 和接收机选择性曲线倾斜部分陡度 ρ_R 之间的关系式有关。

知道了这个频带的界限和 $\varrho(f)$ 的解析形状，我们设法来确定函数 $\varrho_1(f)$ ，这个函数与在该频带中未知的信号频谱近似地相符合，且在该频带以外等于零。在这些条件下，函数 $\varrho_1(f)$ 的傅里叶反变换在接收滤波器 F_R 的输出端给出信号

$$U_R(t) = 2 \int_0^{+\infty} \varrho_1(f) e^{i2\pi f t} df \quad (12.7)$$

并且仅对频率的正半轴进行积分，因此，只要求在这个频率范围内的函数值 $\varrho_1(f)$ 。

此信号的能量 W 用积分

$$W = 2 \int_0^{+\infty} \varrho_1(f) \cdot \varrho_1^*(f) df \quad (12.8)$$

来表示，式中 $\varrho_1^*(f)$ —— $\varrho_1(f)$ 的共轭表示式。

积分(12.7)与(12.8)能够将 A 与 W 表示为 $\Omega_1(f)$ 的函数; 我们将由这些积分导出这些量间的关系式。

§ 12.4. 当 $p_c < p_n$ 时 A 与 W 之间的关系

被辐射信号 $U(t)$ 的频谱用傅里叶变换表示为

$$\Omega(f) = \int_{t_1}^{t_2} U(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (12.9)$$

的形式。

由(12.6), 可以将 $\Omega(f)$ 表示为和

$$\begin{aligned} \Omega(f) = & \int_{t_1}^{t_2} \frac{M(t)}{2} e^{i\varphi(t)} e^{i2\pi(f_T - f)t} dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \frac{M(t)}{2} e^{-i\varphi(t)} e^{-i2\pi(f_T + f)t} dt \end{aligned} \quad (12.10)$$

的形式。

假定调制函数 $M(t)$ 与 $\varphi(t)$ 变化得比 $\cos 2\pi f_T t$ 慢一些, 且所讨论的偏差 $\Delta f_T = f_T - f$ 恒小于载频; 既然我们仅研究正频率范围, 那末公式(12.10)中的第二个积分和第一个积分比较起来, 可以忽略不计。

令

$$C(t) = \frac{M(t) e^{-i\varphi(t)}}{2}, \quad (12.11)$$

可以将(12.9)式写为

$$\Omega(f) = \int_{t_1}^{t_2} C(t) e^{i2\pi \Delta f_T t} dt \quad (12.12)$$

的形式, 再象第五章对函数 $U(t)$ 的处理方式一样, 将此积分重复地对频率进行积分, 得到级数

$$\Omega(f) = \left[\sum_{q=0}^{\infty} (-1)^{q+1} \frac{C^{(q)}(t)}{(i2\pi \Delta f_T)^{q+1}} e^{i2\pi \Delta f_T t} \right]_{t_1}^{t_2}, \quad (12.13)$$

式中

$C^{(q)}(t)$ —— $C(t)$ 的 q 阶导数。

现在来讨论当 Δf_T 增加时所发生的情况。

在 § 12.1 中我们假定，当频率增加时，在带外辐射区域中，辐射频谱的包络线平均以每倍频 p_U 分贝的常量而减低。这就意味着，如果 Δf_T 较大，那末在 $\Omega(f)$ 表示式中，可以得到因子 $\frac{1}{\Delta f_T^n}$ 的形式，其中

$$n = \frac{p_U}{6}. \quad (12.14)$$

由此应得出

a) 与小于 $n-1$ 的 q 值相对应的级数项等于零，亦即可以写为

$$\frac{d^q C(t)}{dt^q} = 0, \text{ 当 } t=t_1, t=t_2 \text{ 及 } 0 \leq q < n-1, \quad (12.15)$$

b) 级数(12.13)从这项开始收敛成表示式

$$\Omega(f) \rightarrow \frac{(-1)^n}{(i 2 \pi \Delta f_T)^n} [C^{(n-1)}(t_2) e^{i 2 \pi \Delta f_T t_2} - C^{(n-1)}(t_1) e^{i 2 \pi \Delta f_T t_1}], \quad (12.16)$$

并且 n 为整数，而根据(12.14)所确定的 p_U 为 6 的倍数。

其次，我们来研究图 12.3，在图中频率轴上表示出已经确定了 Δf_0 与 Δf_T ，以及等于接收机通频带宽度的 Δf_B 。

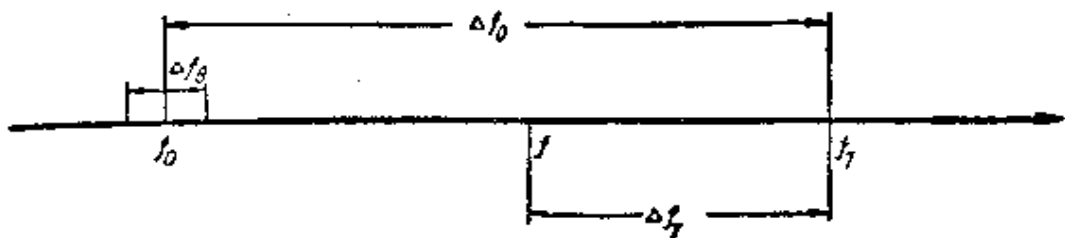


图 12.3 接收机中心频率 f_0 ，接收机频带 Δf_B 和干扰信号载频 f_T 的相对位置

(12.8)式具有

$$W_R = 2 \int_{\Delta f_0 - \frac{\Delta f_B}{2}}^{\Delta f_0 + \frac{\Delta f_B}{2}} \Omega(\Delta f_T) \Omega^*(\Delta f_T) d(\Delta f_T) \quad (12.17)$$

的形式。

假定

$$C^{(n-1)}(t_2) = m_2 e^{i\delta m_2}; \quad C^{(n-1)}(t_1) = m_1 e^{i\delta m_1}, \quad (12.18)$$

$$t_2 - t_1 = \tau \quad \text{与} \quad \delta m_2 - \delta m_1 = \delta m,$$

式中 δm_1 与 δm_2 为相应于时刻 t_1 与 t_2 的 $C^{(n-1)}(t)$ 的相位值。因此，可以将(12.16)改写为

$$\mathcal{Q}(\Delta f_T) = \left[\frac{(-1)^n}{(i 2\pi \Delta f_T)^n} \right] [m_2 e^{i(2\pi \Delta f_T t_2 + \delta m_2)} - m_1 e^{i(2\pi \Delta f_T t_1 + \delta m_1)}] \quad (12.19)$$

的形式。

由此

$$\mathcal{Q}(\Delta f_T) \mathcal{Q}^*(\Delta f_T) = \left[\frac{m_1^2 + m_2^2}{(2\pi \Delta f_T)^{2n}} \right] \cdot \left[1 - \frac{2 m_1 m_2}{m_1^2 + m_2^2} \cdot \cos(2\pi \Delta f_T \tau + \delta m) \right]. \quad (12.20)$$

由于我们假定 $\Delta f_0 > \Delta f_B$ ，那末 Δf_T 在接收机的通频带中实际上不变化且等于 Δf_0 。因此，将(12.20)右边第一个因子中的 Δf_T 用 Δf_0 来代替，并将(12.20)代入(12.17)，得出

$$W_R = \left[\frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{(2\pi \Delta f_0)^{2n}} \right] \cdot \int_{\Delta f_0 - \frac{\Delta f_B}{2}}^{\Delta f_0 + \frac{\Delta f_B}{2}} \left[1 - \frac{2 m_1 m_2}{m_1^2 + m_2^2} \cdot \cos(2\pi \Delta f_T \tau + \delta m) \right] d(\Delta f_T). \quad (12.21)$$

计算(12.21)中的积分，并令

$$k = \frac{\Delta \omega_B \tau}{2} = \pi \Delta f_B \tau,$$

用类似于在 § 2.3 中所进行的处理方式，得到

$$W_R = \left[\frac{2(m_1^2 + m_2^2) \Delta f_B}{(2\pi \Delta f_0)^{2n}} \right] \cdot \left[1 - \frac{2 m_1 m_2}{m_1^2 + m_2^2} \cdot \frac{\sin k}{k} \cdot \cos(2\pi \Delta f_0 \tau + \delta m) \right]. \quad (12.22)$$

由此表示式可以得到平均能量的大小：

$$W_{R\text{平均}} = \frac{2(m_1^2 + m_2^2)\Delta f_B}{(2\pi\Delta f_0)^{2n}} \quad (12.23)$$

和上界与下界处的能量

$$W_{R\text{最大}} = W_{R\text{平均}} \left[1 \pm \frac{2m_1m_2}{m_1^2 + m_2^2} \cdot \frac{\sin k}{k} \right], \quad (12.24)$$

现在来确定划分上界和下界的量的大小。

如果接收机的频带宽度等于辐射所占用的频带宽度，那末，如同我们在 § 3.2 中所看到过的一样，对矩形脉冲 $k=32$ ，对具有实用适宜的圆化的梯形脉冲， $k=12$ 。在靠近 $k=12$ 的值的范围内，

函数 $\left| \frac{\sin k}{k} \right|$ 当 $k=10.9$ 时具有最大值 0.091。因为

$$\frac{2m_1m_2}{m_1^2 + m_2^2} \leq 1,$$

那末两个界限 $W_{R\text{最大}}$ 与 $W_{R\text{最小}}$ 之间的差别不超过 1 分贝，即不超过可以忽略的数量。

在实际条件下， $W_{R\text{最大}}$ 与 $W_{R\text{最小}}$ 之间的差别还要小一些。这是因为在发射机频率不稳定性上必须有容差，进行接收的频带宽度比辐射所占用的频带宽得多。

如果接收机的频带宽度 Δf_B 减小，那末在 (12.17) 中可以认为 $\Omega(\Delta f_T)$ 为常量且等于 $\Omega(\Delta f_0)$ 。从 (12.17) 的积分符号内提出 $\Omega(\Delta f_0)\Omega^*(\Delta f_0)$ ，得到

$$W_R = 2\Delta f_B\Omega(\Delta f_0)\Omega^*(\Delta f_0). \quad (12.25)$$

此时，接收机的作用就如同一个对被辐射信号的频谱分析器一样。

现在来计算信号的最大振幅 A 。

共频谱为加在接收机通频带中传输频谱的一部分、且由积分 (12.7) 所确定的信号，在此处可以改写为

$$U_R(t) = 2 \int_{f_0 - \frac{\Delta f_B}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f_B}{2}} \Omega(\Delta f_T) e^{i2\pi \Delta f_T t} d(\Delta f_T). \quad (12.26)$$

将 $\Omega(\Delta f_T)$ 用由 (12.19) 所得的值来代替, 并且和以前一样, 假定 $\Delta f_0 \gg \Delta f_B$, 于是, $\Delta f_T \approx \Delta f_0$, 将所得到的积分进行计算以后, 得出如下的表示式:

$$U_R(t) = 2 \frac{(-1)^n \Delta f_B}{(i 2 \pi \Delta f_0)^n} \left[m_2 \frac{\sin \pi \Delta f_B (t_2 - t)}{\pi \Delta f_B (t_2 - t)} e^{i(2\pi \Delta f_0 t_2 + \delta m_2)} - m_1 \frac{\sin \pi \Delta f_B (t_1 - t)}{\pi \Delta f_B (t_1 - t)} e^{i(2\pi \Delta f_0 t_1 + \delta m_1)} \right] e^{i2\pi f_0 t}, \quad (12.27)$$

由式中可以看出, 信号 $U_R(t)$ 为两个具有同样频率 f_0 的振荡的代数和 (两个振荡间有相位差, 且振幅调制不相同)。这种调制由比载频 f_0 低很多的频率来实现, 而振幅 A 为 $U_R(t)$ 的模的最大值。

由 (12.27) 得出模的平方:

$$\begin{aligned} |U_R(t)|^2 = & \frac{4(\Delta f_B)^2}{(2\pi \Delta f_0)^{2n}} \left\{ m_1^2 \frac{\sin^2 \pi \Delta f_B (t_1 - t)}{[\pi \Delta f_B (t_1 - t)]^2} + \right. \\ & + m_2^2 \frac{\sin^2 \pi \Delta f_B (t_2 - t)}{[\pi \Delta f_B (t_2 - t)]^2} - 2m_1 m_2 \cdot \frac{\sin \pi \Delta f_B (t_2 - t)}{\pi \Delta f_B (t_2 - t)} \cdot \\ & \left. \frac{\sin \pi \Delta f_B (t_1 - t)}{\pi \Delta f_B (t_1 - t)} \cos (2\pi \Delta f_0 t + \delta m) \right\}. \quad (12.28) \end{aligned}$$

并求出其最大值。

图 12.4 中表示出传输矩形 (靠上面的一个波形) 调制信号和不同的失调下, 通过实验途径所得到的 $U_R(t)$ 值。这些值与按公式 (12.28) 计算的结果符合得很好。

由波形图可以看出, 即使在不太宽的滤波器频带 ($k \approx 16$) 和不太大的失调下, 函数 $|U_R(t)|$ 具有两个分开的脉冲形式, 这两个分开脉冲的最大值相应于时刻 t_1 与 t_2 。在一般情况下, 这些脉冲的最大值可能是彼此不相等的。

在第一次近似中, $U_R(t)$ 的未知最大值等于 $|U_R(t_1)|$ (如 $m_1 > m_2$) 或 $|U_R(t_2)|$ (如 $m_2 > m_1$)。

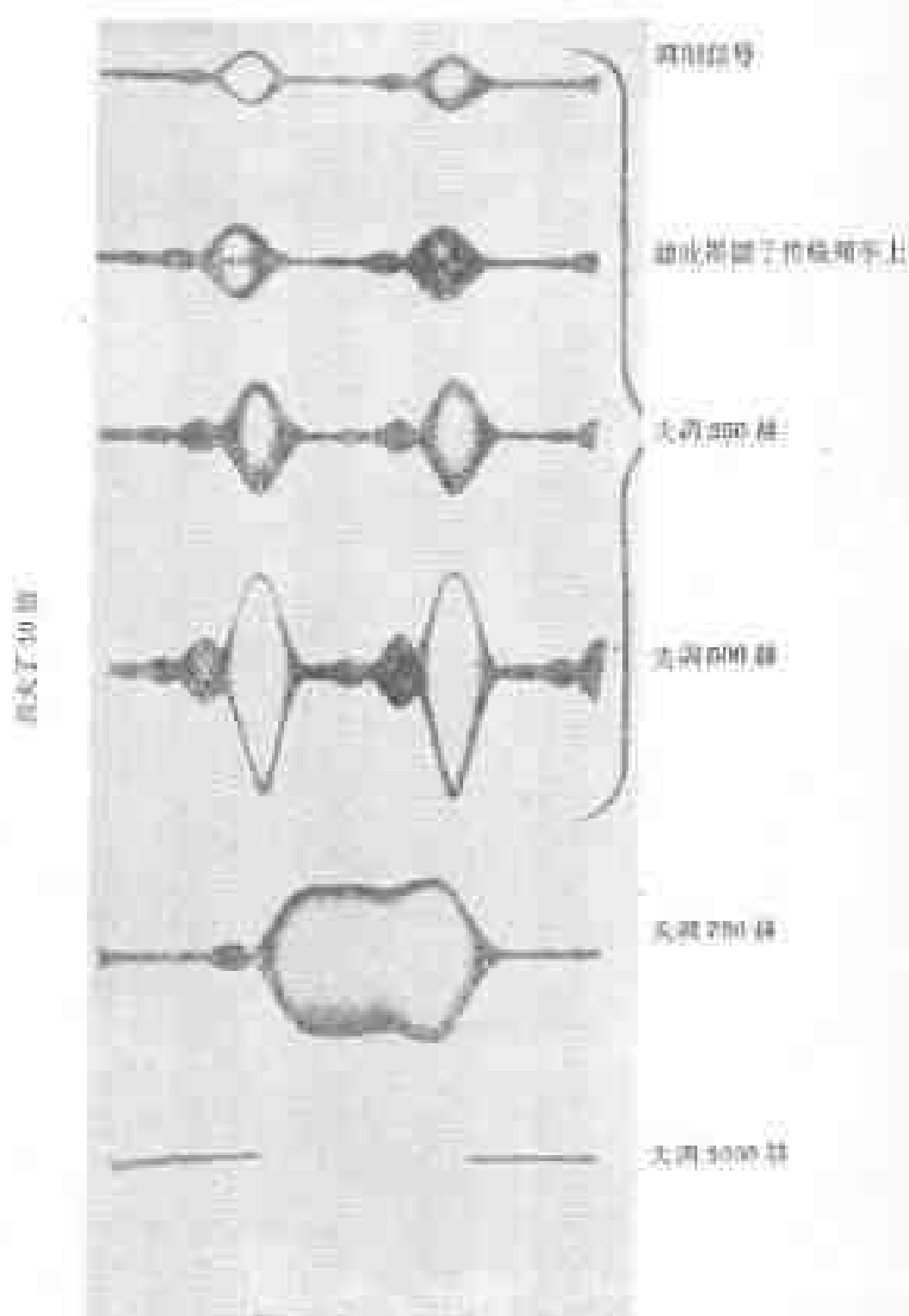


图 11.4 串行传输时信号的情况。曲线沿轴的方向——200 赫，
 缺陷位置——900 赫，信号频率——400 赫

假定 $m_1 > m_2$, $|U_R(t_1)| > |U_R(t_2)|$ 。则由公式(12.28), 当 $t = t_1$ 并考虑到 $t_2 - t_1 = v$, 得出

$$A^2 = |U_R(t_1)|^2 = \frac{4(\Delta f_B)^2}{(2\pi\Delta f_0)^{2n}} \left[\frac{m_2^2 \sin^2 k}{k^2} + m_1^2 - 2m_1 m_2 \frac{\sin k}{k} \cdot 1 \cdot \cos(2\pi\Delta f_0 v + \delta m) \right] = \frac{4(\Delta f_B)^2 m_1^2}{(2\pi\Delta f_0)^{2n}} \left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \frac{\sin^2 k}{k^2} + 1 - 2\frac{m_2}{m_1} \frac{\sin k}{k} \cos(2\pi\Delta f_0 v + \delta m) \right]. \quad (12.29)$$

由于 $m_1 > m_2$, 故

$$\frac{m_2}{m_1} < 1 \quad \text{且} \quad \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 < \frac{m_2}{m_1}.$$

和(12.29)右边方括号中其他项比较起来, 将 $\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \frac{\sin^2 k}{k^2}$ 忽略不计, 得出近似的等式

$$A^2 \approx \frac{4(\Delta f_B)^2 m_1^2}{(2\pi\Delta f_0)^{2n}} \left[1 - 2\frac{m_2}{m_1} \frac{\sin k}{k} \cos(2\pi\Delta f_0 v + \delta m) \right]. \quad (12.30)$$

由方程(12.30)得出平方的平均值:

$$A^2_{\text{平均}} = \frac{4(\Delta f_B)^2 m_1^2}{(2\pi\Delta f_0)^{2n}}, \quad (12.31)$$

和它的两个极限值

$$A^2_{\text{最大}} = A^2_{\text{平均}} \left(1 \pm 2\frac{m_2}{m_1} \frac{\sin k}{k} \right). \quad (12.32)$$

(12.32)中两极限值彼此靠得很近, 因为我们假定 $k > 1$, 且

$$\frac{m_2}{m_1} < 1.$$

由方程(12.23)与(12.31)得出联系 $A^2_{\text{平均}}$ 与 $W_{\text{平均}}$ 的等式

$$A^2_{\text{平均}} = \frac{2m_1^2 \Delta f_B}{m_1^2 + m_2^2} W_{\text{平均}}. \quad (12.33)$$

如同我們已經看到的那樣, A 与 W 偏离于平均值很小。于是可証明, 当 $p_U < p_R$ 时, 接收机对无线电报传输反应的最大振幅, 实际上与所接收的相应能量的平方根成比例, 其比例系数与 Δf_0

无关。

§ 12.5. 当 $p_u > p_k$ 时 A 与 W 之间的关系

在§12.2中我們曾指出，如果 $p_u > p_k$ ，那末当失調 Δf_0 足够大时，接收机所接收的能量的最大部分，是由辐射频谱的主要部分产生的。

用 $\Delta f'_B$ 表示频谱 $\varrho(f)$ 主要部分的宽度，这宽度实际上等于辐射所占用的频带宽度（图 12.5），用 $Z(f)$ 表示等效于接收机的滤波

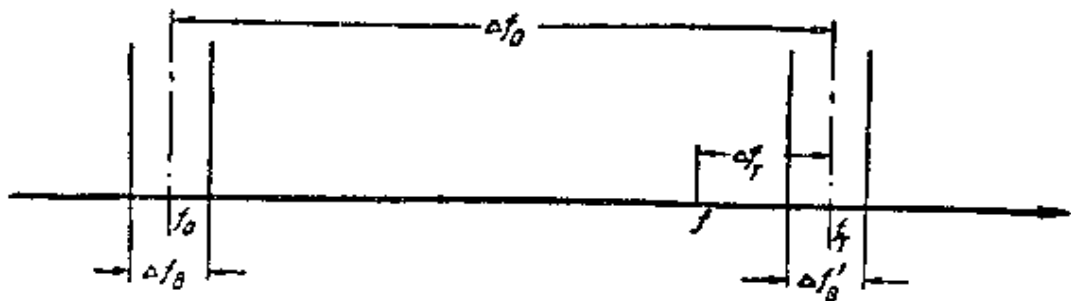


图 12.5 接收机频带 Δf_B 与干扰信号频谱主要部分 $\Delta f'_B$ 的相对位置

器 F_R 的传输系数，可以将 $\varrho_1(f)$ 确定为函数

$$\varrho_1(f) = Z(f)\varrho(f), \tag{12.34}$$

它对应于频率区间

$$f_T - \frac{\Delta f'_B}{2} < f < f_T + \frac{\Delta f'_B}{2}. \tag{12.35}$$

而在此区间界限以外，函数等于零。

其次，假定载波频率 f_T 为常值，而接收机的调谐频率 f_0 是变化的，引入变量

$$\Delta f_T = f_T - f.$$

注意到 $\varrho(f)$ 仅与 Δf_T 有关，因为被辐射的频谱以频率 f_T 为中心，而以频率 f_0 为中心的传输系数 $Z(f)$ 与偏移 $\Delta f_0 - \Delta f_T$ 有关。

此时方程 (12.34) 可以写为

$$\varrho_1(\Delta f_T) = Z(\Delta f_0 - \Delta f_T)\varrho(\Delta f_T). \tag{12.36}$$

由方程 (12.34) 过渡至方程 (12.36)，相应于将频率函数的

起始点由零移至点 f_T 。我们将新的变化频率记为 Δf_T 。因此，区间(12.35) 此时成为

$$-\frac{\Delta f'_R}{2} < \Delta f_T < \frac{\Delta f'_R}{2}. \quad (12.37)$$

可以认为，在频带 $\Delta f'_R$ 的界限内，所有频率的放大均相同，且仅由该种失调时滤波器传输系数值（亦即 $Z_0(\Delta f_0)$ 值）来确定。在这种假定下，滤波器输出信号的频谱 $\Omega_1(f)$ 用输入信号频谱 $\Omega(f)$ 表示为下列形式：

$$\Omega_1(\Delta f_T) = Z_0(\Delta f_0) \Omega(\Delta f_T). \quad (12.38)$$

然后，我们来求出滤波器输出端上的信号 $U_R(t)$ 。为此，对 $\Omega_1(f)$ 进行傅里叶反变换，亦即根据 (12.7) 与 (12.38) 得到

$$\begin{aligned} U_R(t) &= \int_{-\frac{\Delta f'_R}{2}}^{+\frac{\Delta f'_R}{2}} \Omega_1(\Delta f_T) e^{i2\pi \Delta f_T t} d(\Delta f_T) = \\ &= Z_0(\Delta f_0) \int_{-\frac{\Delta f'_R}{2}}^{+\frac{\Delta f'_R}{2}} \Omega(\Delta f_T) e^{i2\pi \Delta f_T t} d(\Delta f_T) = \\ &= Z_0(\Delta f_0) U_T(t). \end{aligned} \quad (12.39)$$

其次，根据(12.8)和(12.38)，得出滤波器输出端上的能量值 W 为

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\frac{\Delta f'_R}{2}}^{+\frac{\Delta f'_R}{2}} \Omega_1(\Delta f_T) \Omega_1^*(\Delta f_T) d(\Delta f_T) = \\ &= |Z_0(\Delta f_0)|^2 \int_{-\frac{\Delta f'_R}{2}}^{+\frac{\Delta f'_R}{2}} \Omega(\Delta f_T) \Omega^*(\Delta f_T) d(\Delta f_T) = \\ &= |Z_0(\Delta f_0)|^2 W_T \end{aligned} \quad (12.40)$$

由(12.39) 可以看出，滤波器输入端和输出端上的信号具有相同的形状。由这个表示式可以得出确定 A 的关系式：

$$|U_R(t)| = |Z_0(\Delta f_0)| |U_T(t)|,$$

或者，用 A_T 表示被辐射信号的最大振幅，则可以写出

$$A = |Z_0(\Delta f_0)| A_T, \quad (12.41)$$

比较 (12.40) 与 (12.41)，得到表示式

$$\frac{A^2}{W} = \frac{A_T^2}{W_T}, \quad (12.42)$$

此表示式表明，接收机对无线电报传输反应的最大振幅，和相应接收的能量的平方根成比例，这就象被传输信号的最大振幅与所辐射的能量的平方根成比例一样，并且比例系数与 Δf_0 无关。

综合以上所述，可以认为，如果：

a) 频带宽度为 Δf_B 的接收机调谐在频率 Δf_0 ，其选择性曲线具有 p_R 分贝/倍频程的渐近陡度；

b) 具有接近于宽度 Δf_B 的频带的发射机，调谐在频率 $f_0 + \Delta f_0$ ，其带外辐射以 p_U 分贝/倍频程的速度减低；

且 $p_U > p_R$ ，而偏移 Δf_0 的大小和 Δf_B 比较起来可以忽略；那末，在上述这些条件下，信号和它的频谱不会变形，而信号的衰减按接收机选择性曲线来确定。

根据如上所述，可以作出下列结论：

1. 当失调足够大时，接收机所接收的功率的变化曲线，或者趋于信号频谱减低的陡度 p_U ，或者趋于接收机选择性曲线的陡度 p_B 。

如果 $p_U < p_R$ ，那末接收机所接收的能量，近似地等于 W_R (见图 12.2)，而表示能量随失调而变化的曲线，趋于 p_U 分贝/倍频程的陡度；信号的中央部分不再现，与它起始和终止相对应的，是大小和形式与信号增长和下降规律有关的一些脉冲。

如果 $p_U > p_R$ ，那末接收机所接收的能量等于 W_u ，信号及其频谱不变形，而信号的衰减根据接收机的选择性曲线来确定。

如果 $p_U = p_R$ ，那末很难区分 W_u 与 W_R 中哪个的影响占优势，因此，应当将通信频谱整个地来加以讨论。

2. 等式 (12.5) 包括三个方面的论断：

a) 如果 $p_U = p_R$, 则 $p_W = p_U = p_R$;

б) 如果 $p_U < p_R$, 则 $p_W = p_U < p_R$;

в) 如果 $p_U > p_R$, 则 $p_W = p_U > p_R$ 。

这些论断说明, 加于接收机的干扰功率随失调而变化的曲线的陡度, 不可能超过 p_U 或 p_R 值中的最小一个。因此, 例如, 当陡度 p_U 已达到 p_R 值时, 那末再进一步增加它就沒有甚么意义, 因为在这种情况下, 在此以前由 p_U 确定的 p_W , 当 p_U 进一步增加时, 将由 p_R 来确定。

这种原则也适合于另一种情况: 即当我们打算将 p_R 增加到比 p_U 值大时。

于是, 如发射机与接收机的渐近陡度 p_U 和 p_R 相同, 当差值增加时, 互相干扰的减低将最快。

3. 如果在干扰辐射载频与遭受干扰接收机的调谐频率之间的失调足够大, 那末当失调变化时, 干扰信号功率仍然与它的最大振幅的平方成比例。因此在这种条件下, 我们按功率或按最大振幅来确定信号/干扰比是沒有甚么差异的。

§ 12.6. 确定波道間的差值

前面几节中所讨论的方法, 可以用来确定相邻波道間的频率差异, 这种差异必须使得互相干扰不超过給定的数值。下面按照这种方法来建立表示干扰信号的衰耗与两个平均频率 (接收机调谐在其中的一个平均频率上, 另一个则为干扰信号频谱的平均频率) 之間的差异的关系。此衰耗即为失调时从干扰信号源所实际接收到的平均功率, 与該接收机所接收的平均功率之比 (如果接收机调谐在干扰信号上的話)。

下面所引用的曲线属于不同辐射类型和不同的接收机。由这些曲线所得到的差值上, 应当附加上由于发射机频率不稳定而产生的差异。发射机频率的容許偏差表列在[文 43, 第 336 頁]中。图 12.6 表示无线电话传输频谱的包络线。图 12.7 与图 12.8 表示供計算用

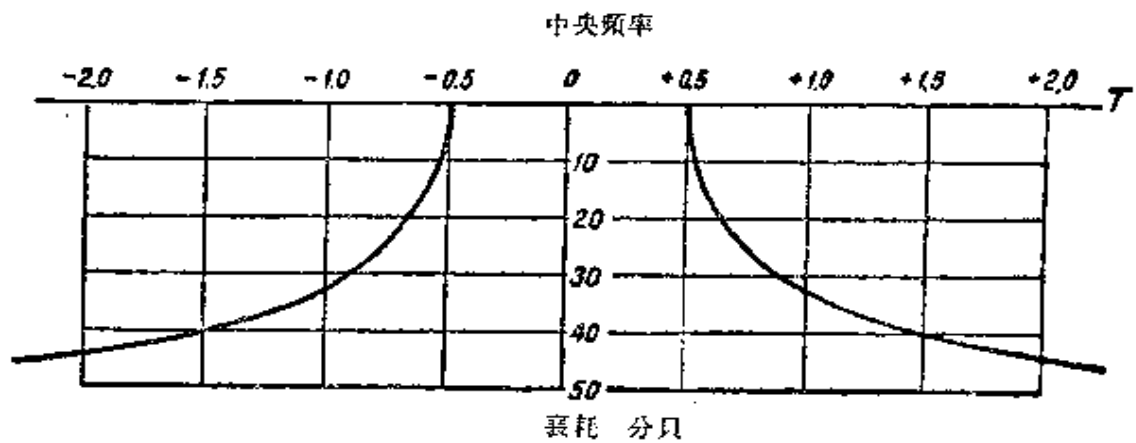


图 12.6 用于无线电传输理论研究的频谱包络线； T ——频率差异（从中央频率来量度）与必要频带宽度间的比值

的接收机特性曲线。

我们来研究一下当所用接收机高频部分具有足够大的线性动态区域的情形，并且将不考虑某些非线性现象（这种非线性现象在强烈的互相干扰下特别明显）。

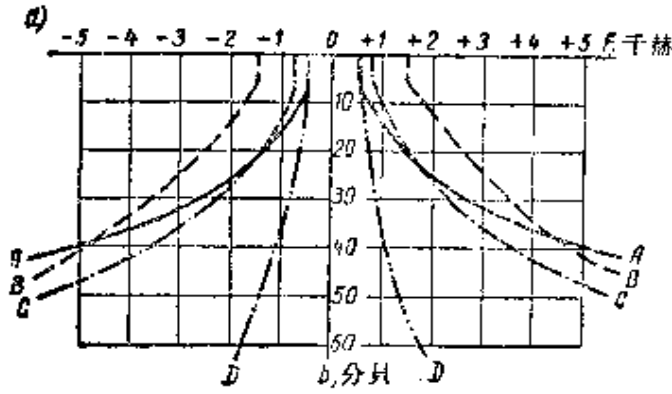
现在来对不同类辐射下的上述曲线进行讨论。

a) 振幅键控的电报通信 (A1)^① 计算时以离散频谱作为依据，该频谱由均匀的电报信号序列（亦即持续时间相等的点子）所构成。假定信号的初始矩形形状通过由电容与电阻所组成的最简单滤波器以后发生了变化。决定信号增长或下降速度的滤波器时间常数，为基本信号持续时间的二十分之一。最小差值由图12.9—12.10确定，在两个振幅键控的发报频率间，应当将这种差值作为干扰信号的、期望的衰减常数来加以保持。

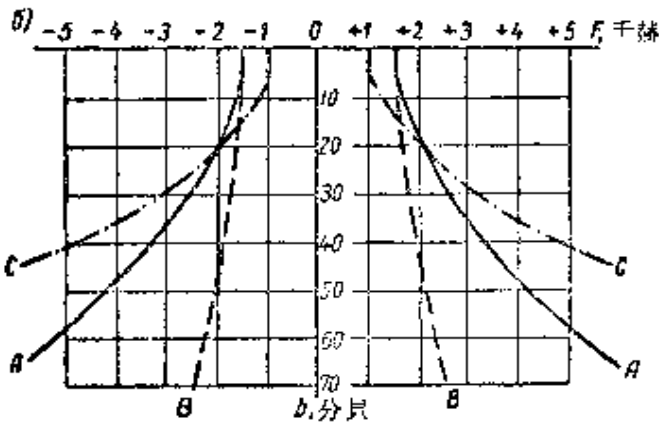
b) 用音频调制的、振幅键控的电报 (A2) 图12.11的计算曲线是根据下列假定而绘制的：即由1000赫单一频率进行调制，只对调制频率的电压进行键控。

b) 电话 (A3) 如果两个双频带电报系统工作于相邻的波道中，且两信号的场彼此相等，那末，干扰将位于接收机滤波器衰减

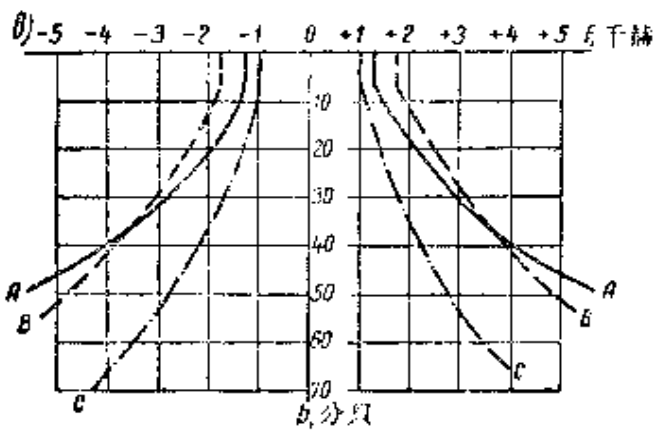
① 辐射的表示符号参阅附录Ⅲ。



曲綫	頻帶寬度, 千赫	衰耗变化, 分貝/倍頻程
A	1	10
B	3	20
C	1.5	15
D	1	30



曲綫	頻帶寬度, 千赫	衰耗变化, 分貝/倍頻程
A	3	30
B	3	90
C	2	15



曲綫	頻帶寬度, 千赫	衰耗变化, 分貝/倍頻程
A	2.5	20
B	2	30
C	3.5	30

图 12.7 理論研究用收報机特性曲綫; b——衰耗

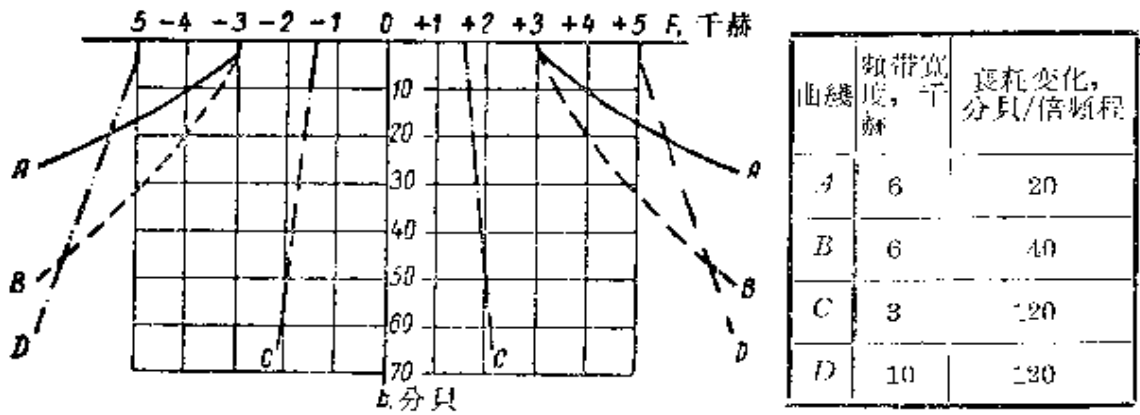


图 12.8 理论研究用受话器特性曲线

特性曲线的倾斜部分上。此时将由于有用信号的载波和干扰台不相等的边频带之间的差拍而引起干扰。此外，由于分布在最靠近有用信号波道的干扰台的边频带可以在振幅方面超过干扰载波，那末，可能由于边频带分量间的差拍而发生附加的干扰。第一种形式的干扰产生清晰的串话（尽管有很大的畸变），而第二种形式的干扰仅产生不清晰的串话；和第一种形式的干扰相比较，它的容限可以提高 10 分贝。由此可见，值得加以重视的只是载波和干扰台边频带间差拍所形成的干扰。通常借助于音频滤波器可以将其他分量间的串话加以消除。

如果两载波在频率上的差值超过最高调制频率的一倍，那末和所需要的信号比较起来，清晰的串话电平相当近似地等于两载波振幅之比。这就意味着，在场相等时，干扰载波的相对大小由接收机滤波器的衰耗来确定。

此外，在上面所讨论的情况下，当以双边带工作时，干扰的低频分量的大小还要小一些，这是因为被削弱的干扰载波及其边带之间发生差拍，这种差拍在接收机滤波器中也被削弱。这对线性检波器与平方律检波器来说都是正确的。

为了绘制曲线，采用了图 12.6 上所示的频谱，并引入系数 M' ， M' 等于遭受干扰作用的接收机的频带宽度与电话传输所必需的频

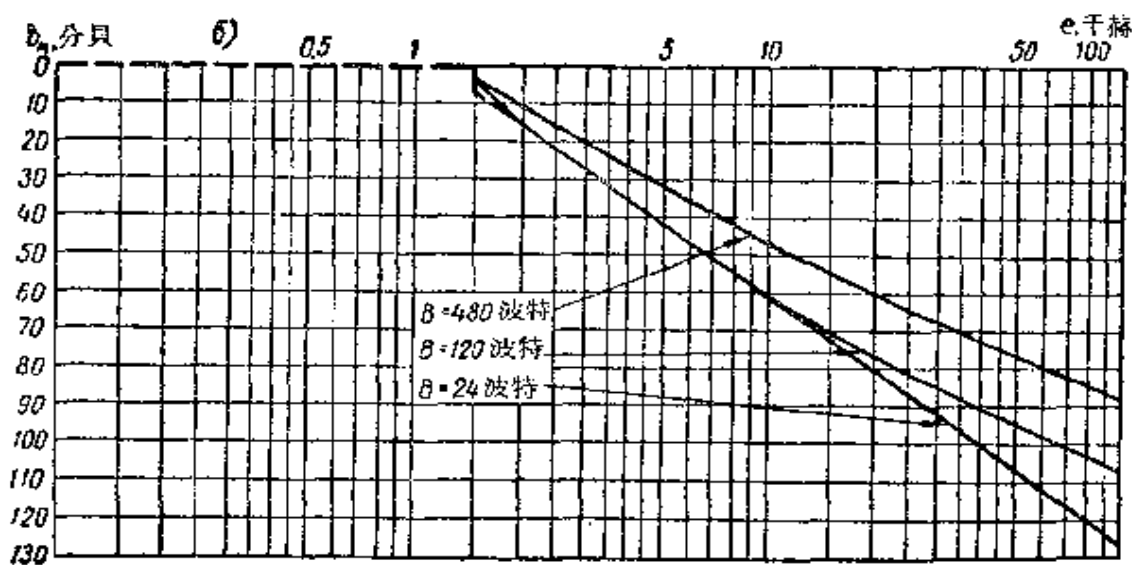
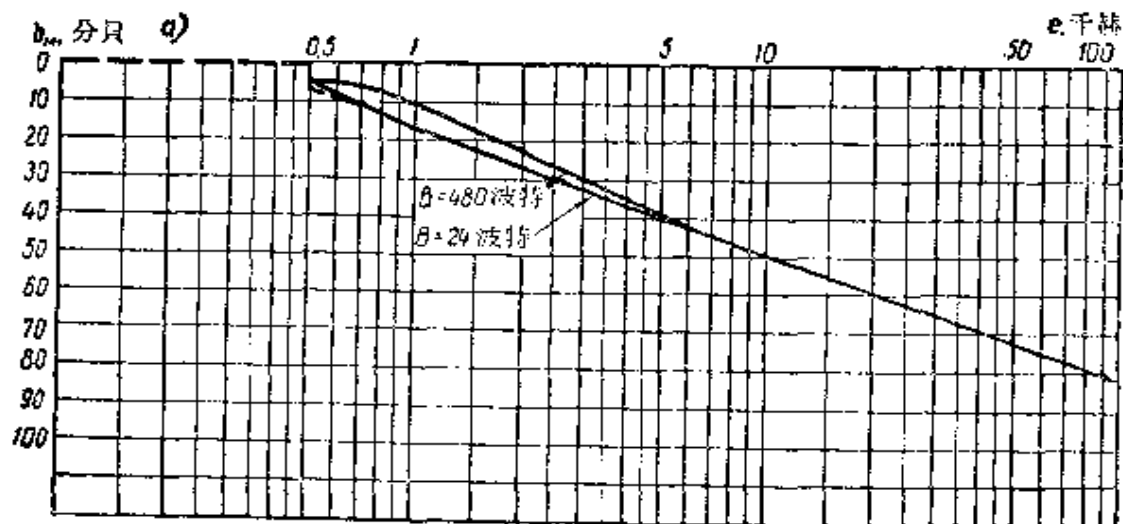
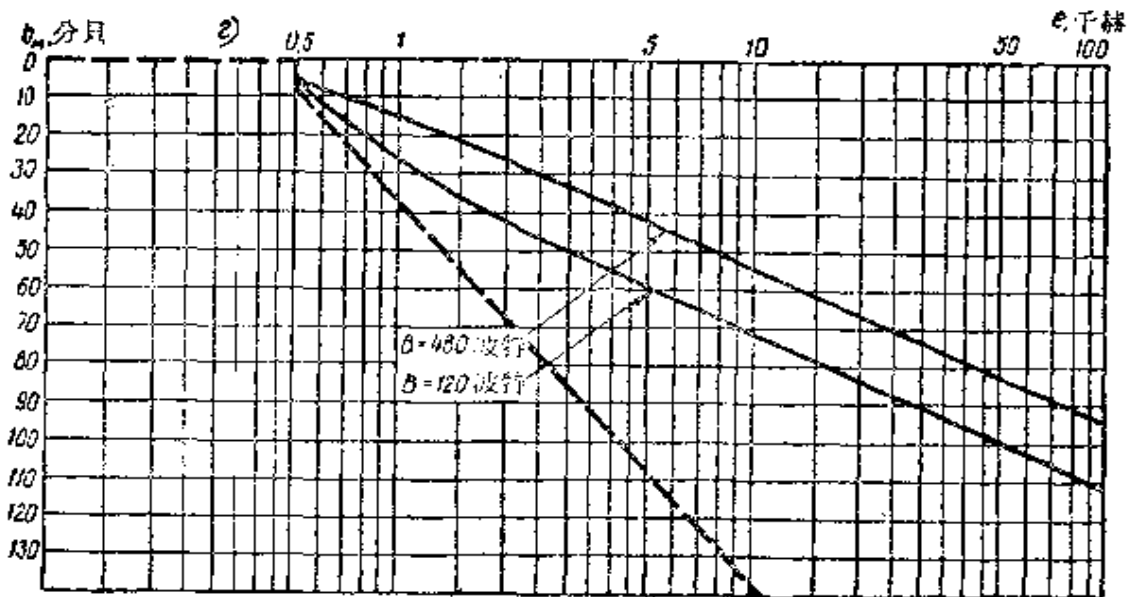
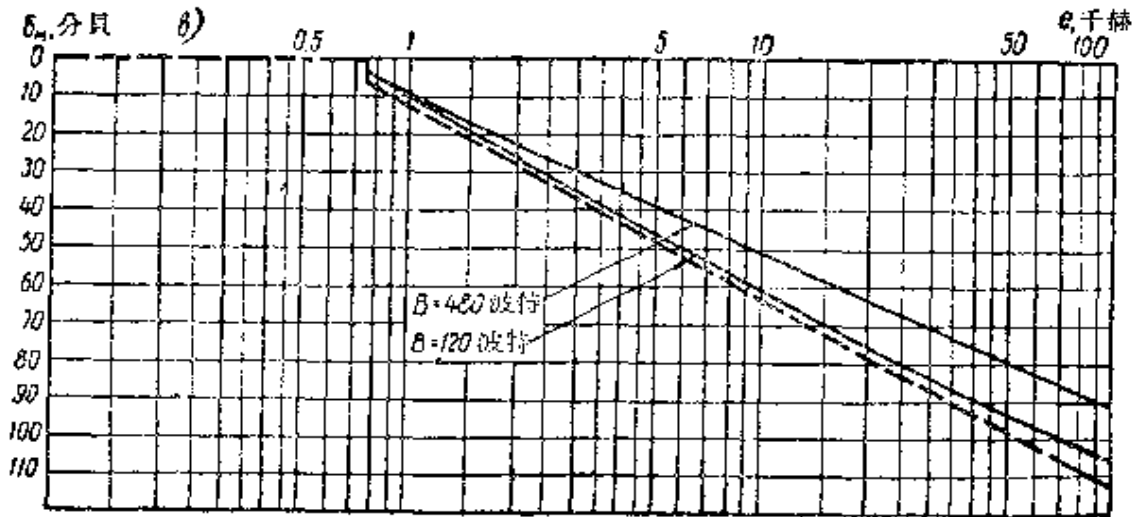


图 12.9 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。接
 扰信号的衰耗，分贝； $\tau B = \frac{1}{20}$ 。干扰辐射——电报 A1。接收
 变化——10 分贝/倍频程；6) 不均匀性为 6 分贝的频带宽
 6 分贝的频带宽度——1.5 千赫，衰耗变化——15 分贝/倍频
 程——30 分贝/倍频程。



接收机的频率特性用虚线给出： ϵ —相邻频率间的差值； b_M —干扰机特性：a) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——1 千赫，衰耗度——3 千赫，衰耗变化——20 分贝/倍频程；b) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——1 千赫，衰耗变化

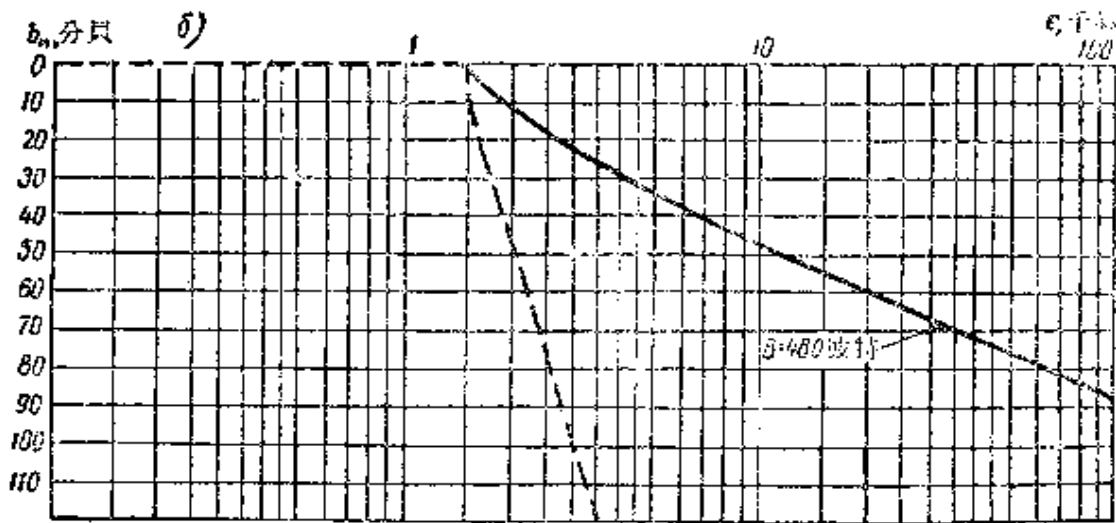
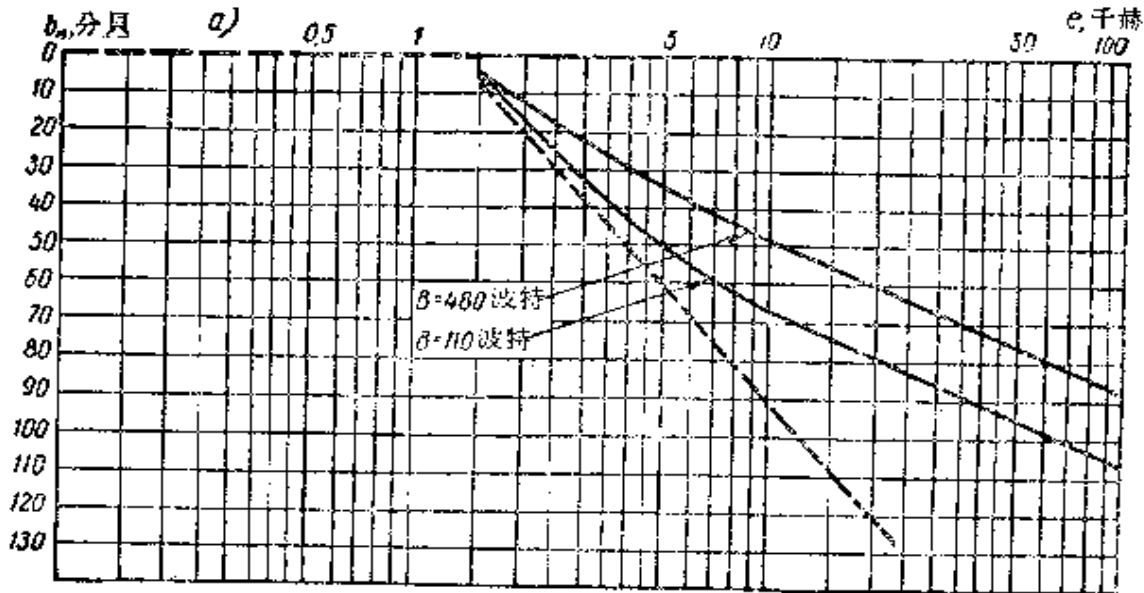


图 12.10 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。接收机的频率特性用虚线给出： e ——相邻频率间的差值， b_n ——干扰信号的衰耗，分贝； $\tau B = \frac{1}{20}$ 下就幅射——电报 M 。接收机特性：a) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——3 千赫，衰耗变化——30 分贝/倍频程；b) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——3 千赫，衰耗变化——90 分贝/倍频程。

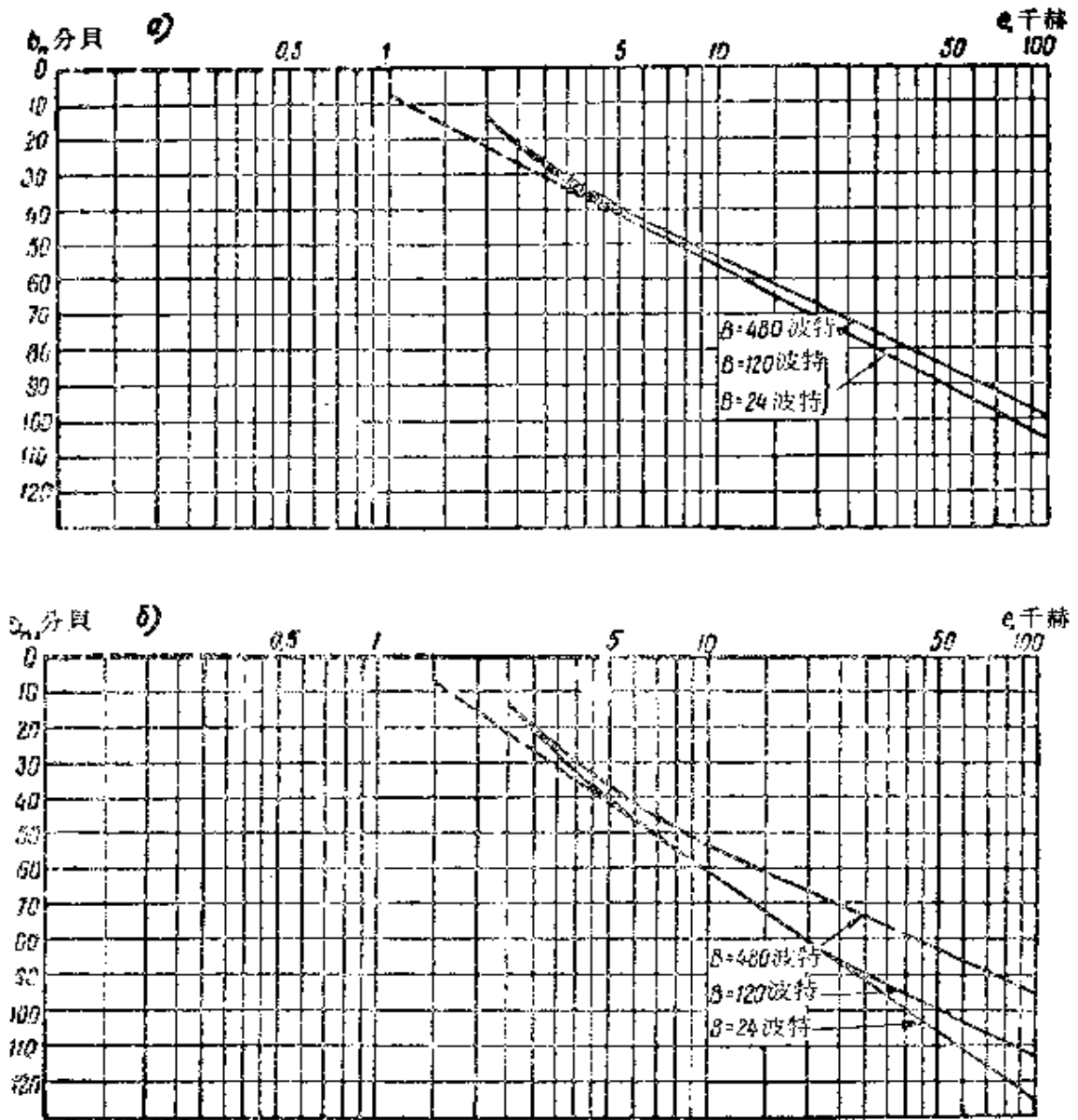
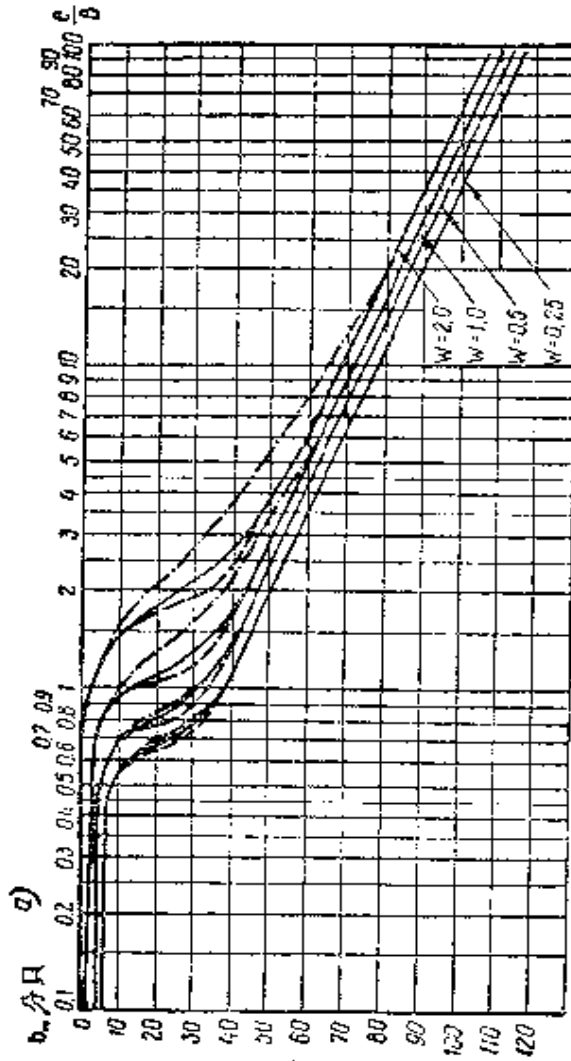


图 12.11 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。电压用振幅调制，调制频率 1000 赫。接收机的频率特性用虚线绘出； e ——相邻频率间的差值， $\tau B = \frac{1}{20}$ ； b_m ——干扰信号的衰耗，分贝。干扰频率——电报 $M2$ 。接收机的特性：a) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——2 千赫，衰耗变化——45 分贝/倍频程；b) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——3 千赫，衰耗变化——20 分贝/倍频程



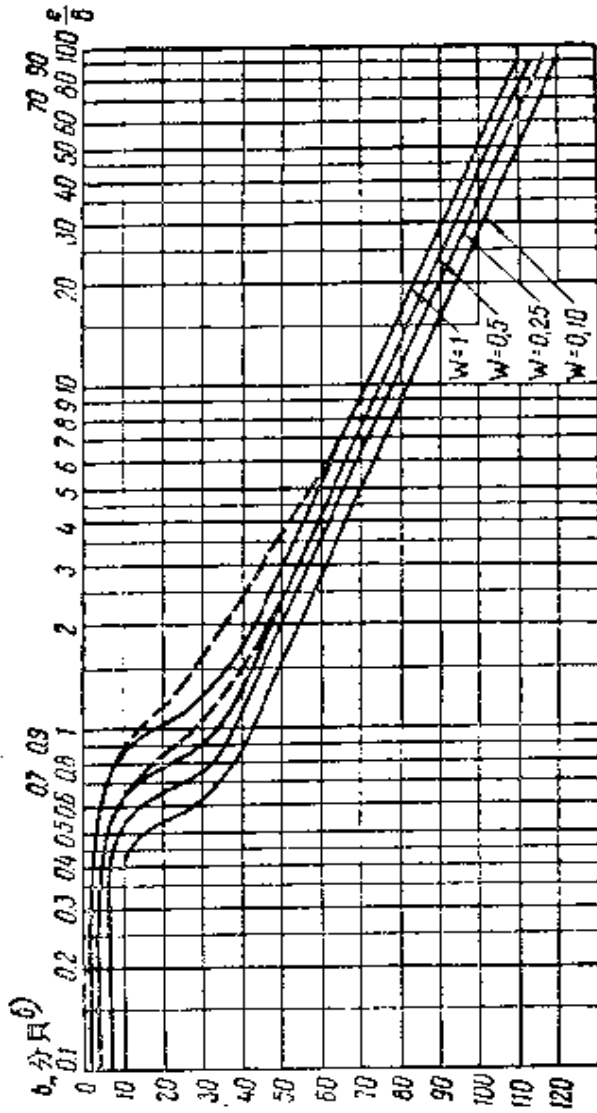


图 12.12 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化：
 b ——相邻频率间的差值； P ——干扰信号好的衰耗，分贝。

$W = \frac{\text{接收机的带宽}}{\text{干扰的必要带宽}}$

干扰幅射——电话 ΔB ，相应于图上曲线的衰耗变化：

- a) ———— 120 分贝/倍频程；
- 30 分贝/倍频程；
- · - · - 20 分贝/倍频程；
- 6) ———— 30 分贝/倍频程；
- 15 分贝/倍频程。

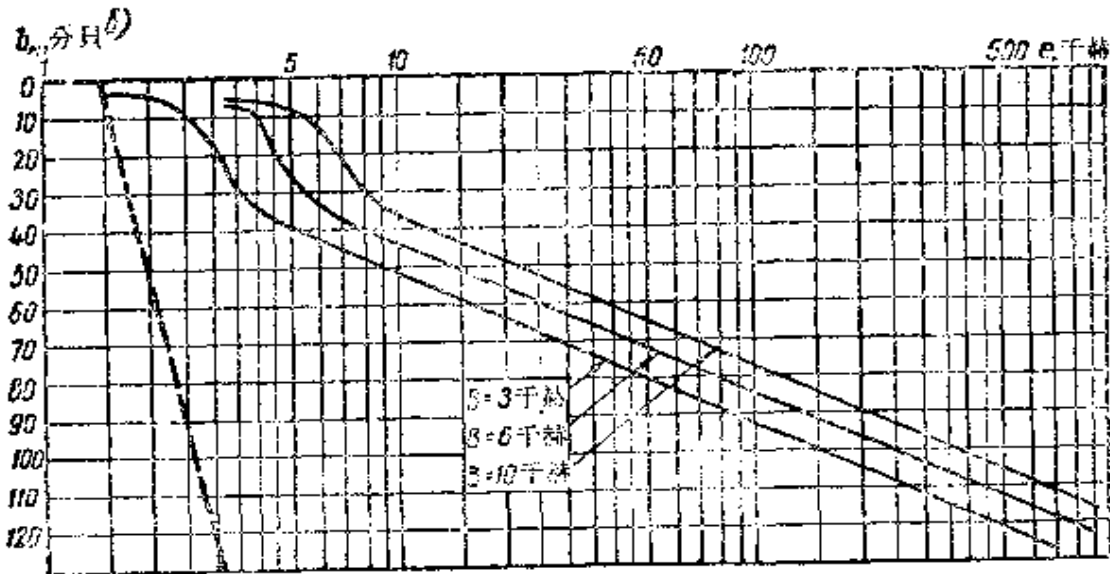
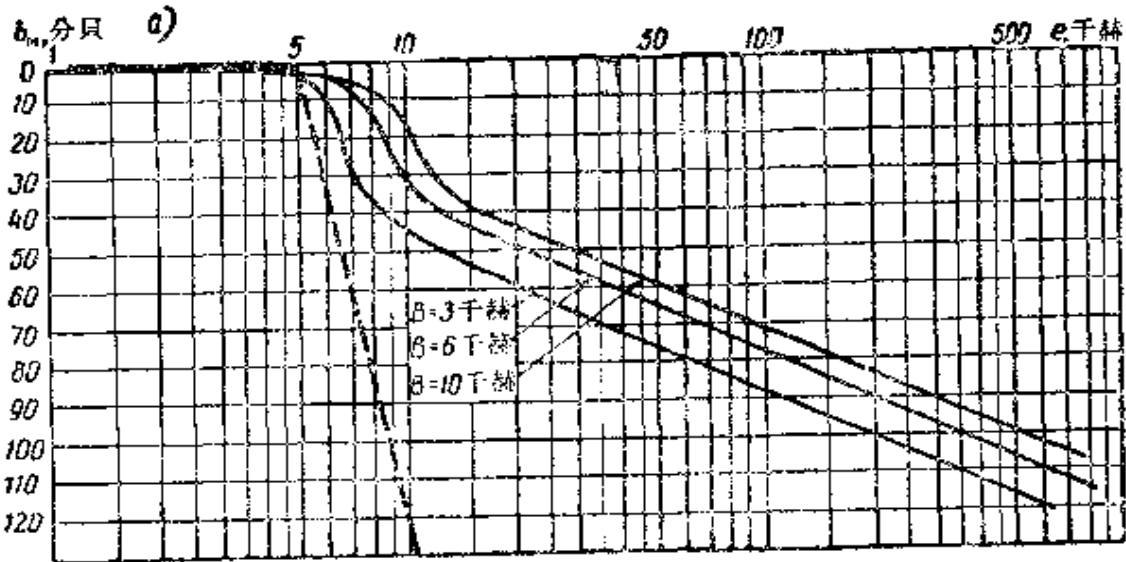
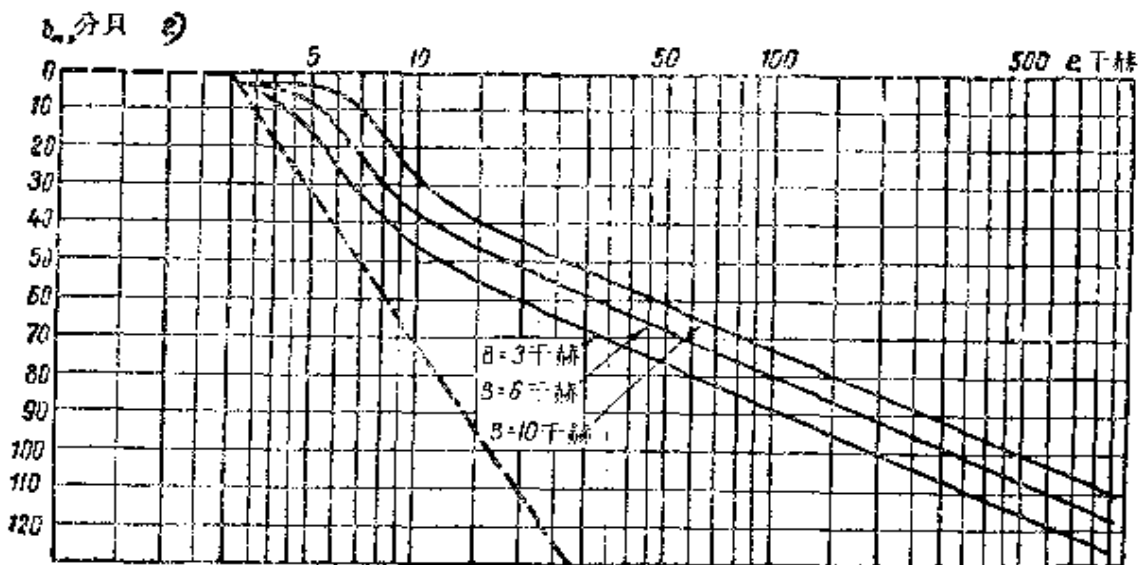
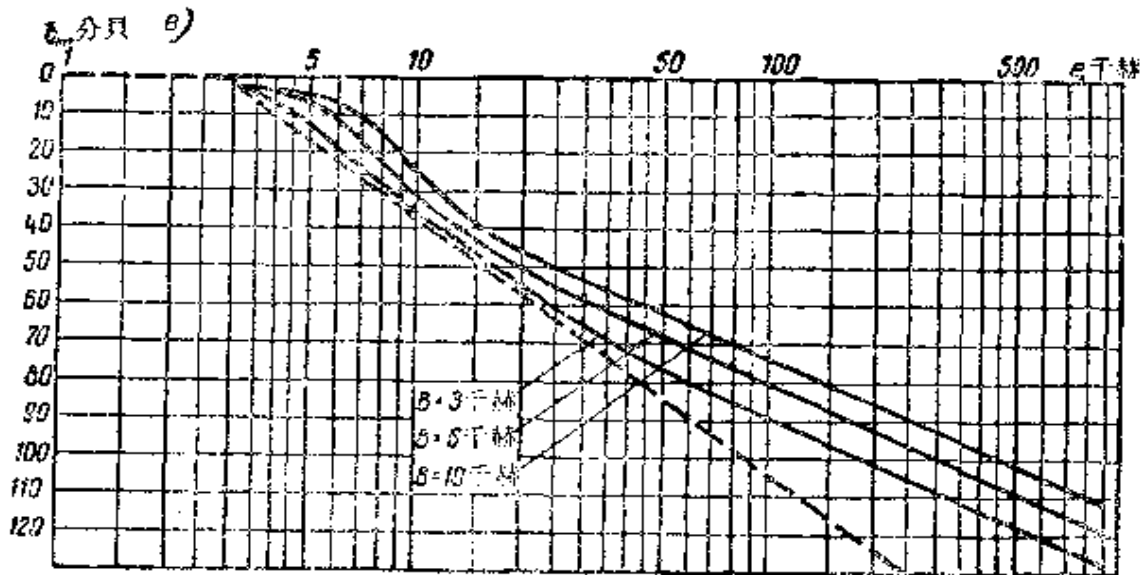


图 12.13 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。
 B ——干扰信号的必要频带宽度。干扰辐射——电话 43。
 2 分贝的频带宽度——10 千赫时，衰耗变化——120 分贝/倍程；
 B) 不均匀性为 2 分贝的频带宽度——6 千赫，衰耗变化——40 分贝/倍频程



接收机的频率特性用虚线给出： e ——相邻频率间的差值； $b_{\text{ш}}$ ——干扰信号的衰耗，分贝。接收机特性：a) 不均匀性为 2 分贝/倍频程；б) 不均匀性为 2 分贝的频带宽度——3 千赫，衰耗变化——6 千赫，衰耗变化——20 分贝/倍频程；г) 不均匀性为 2

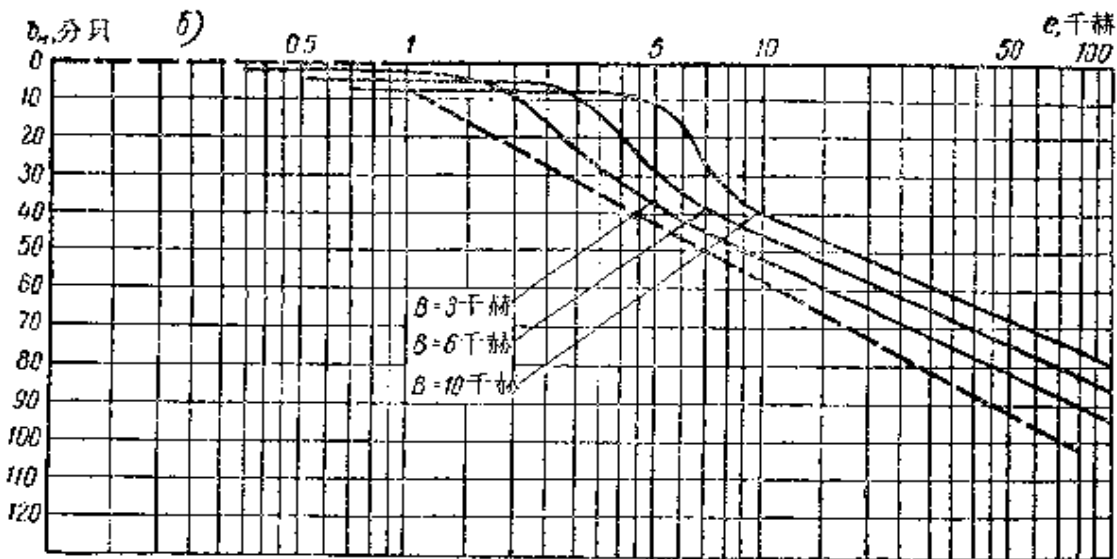
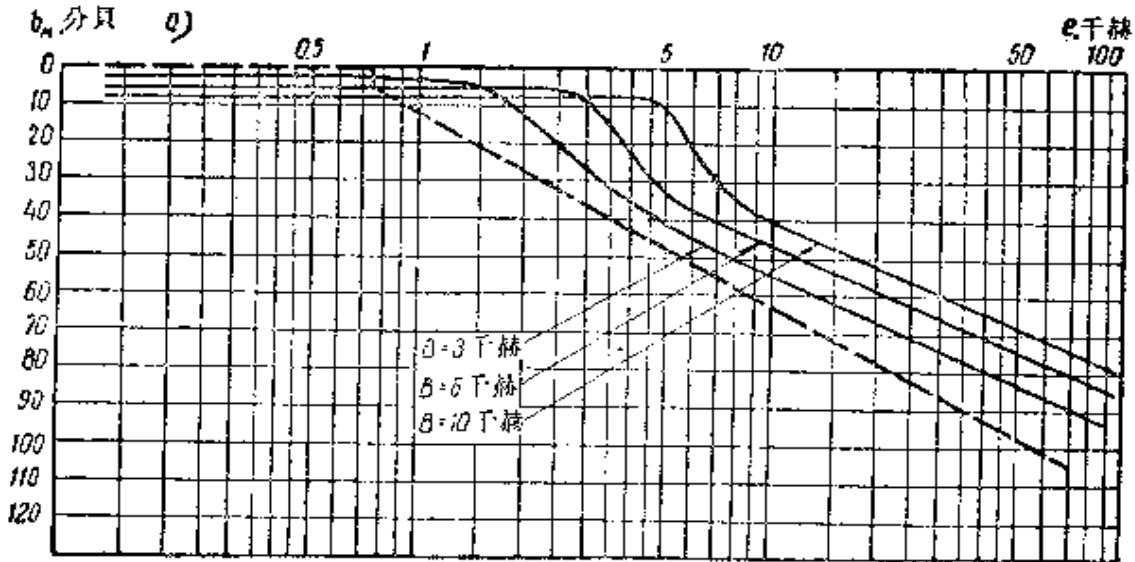
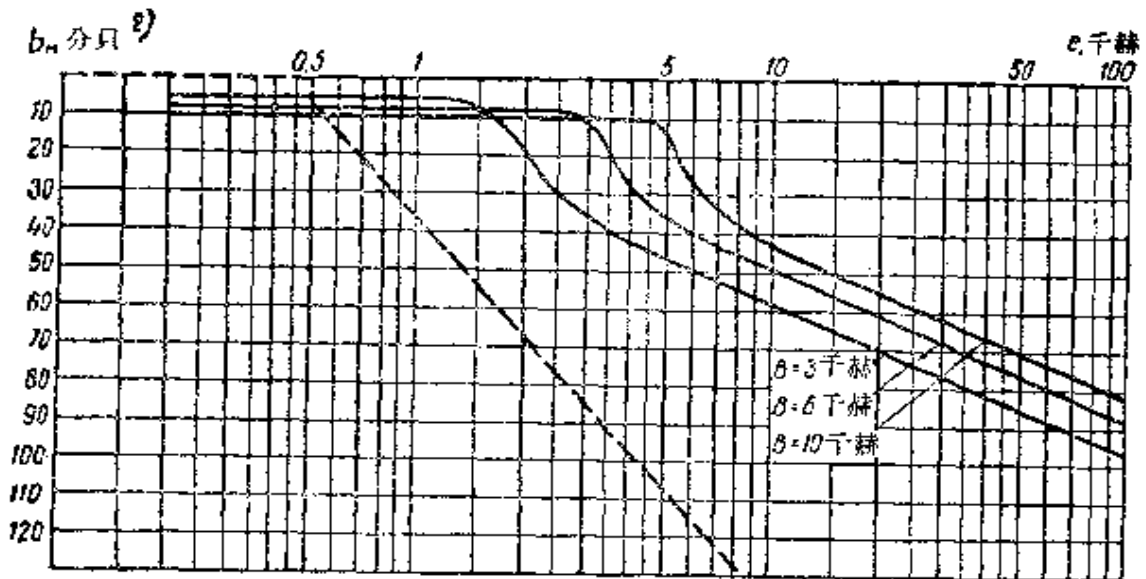
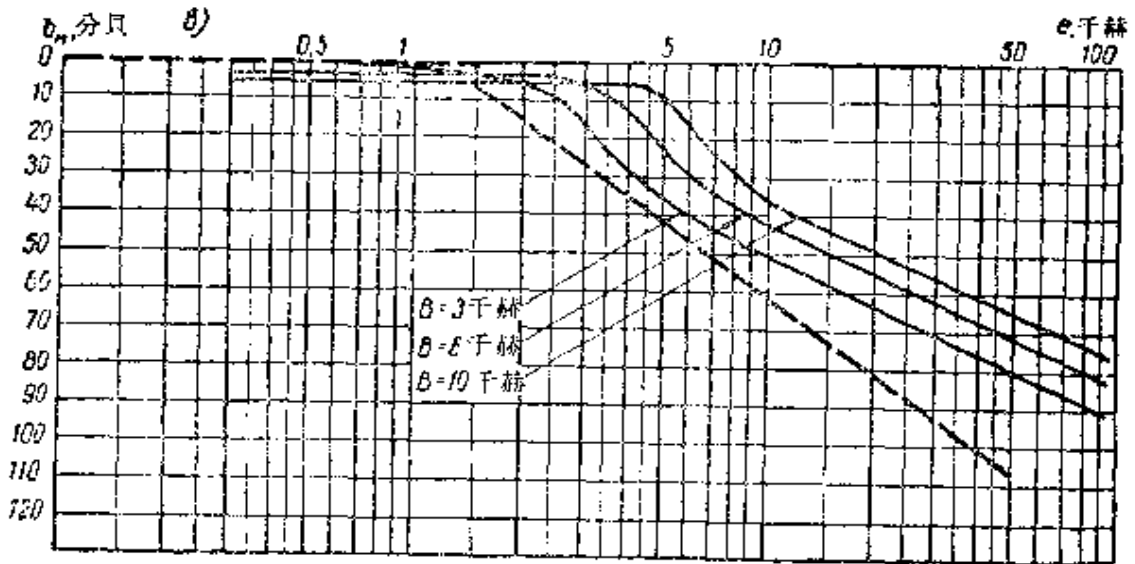


图 12.14 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。
 B ——干扰信号的必要频带宽度。干扰辐射——电话 48，
 6 分贝的频带宽度——1.5 千赫，衰耗变化——30 分贝/倍频程；
 衰耗变化——15 分贝/倍频程；s) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——
 的频带宽度——1 千赫时，衰



接收机的频率特性用虚线绘出： e ——相邻频率间的差值； b_n ——干扰信号的衰耗，分贝。接收机特性： a) 不均匀性为程； b) 不均匀性为6分贝的带宽宽度——2千赫，衰耗变3千赫，衰耗变化——20分贝/倍频程； c) 不均匀性为6分贝/倍频程

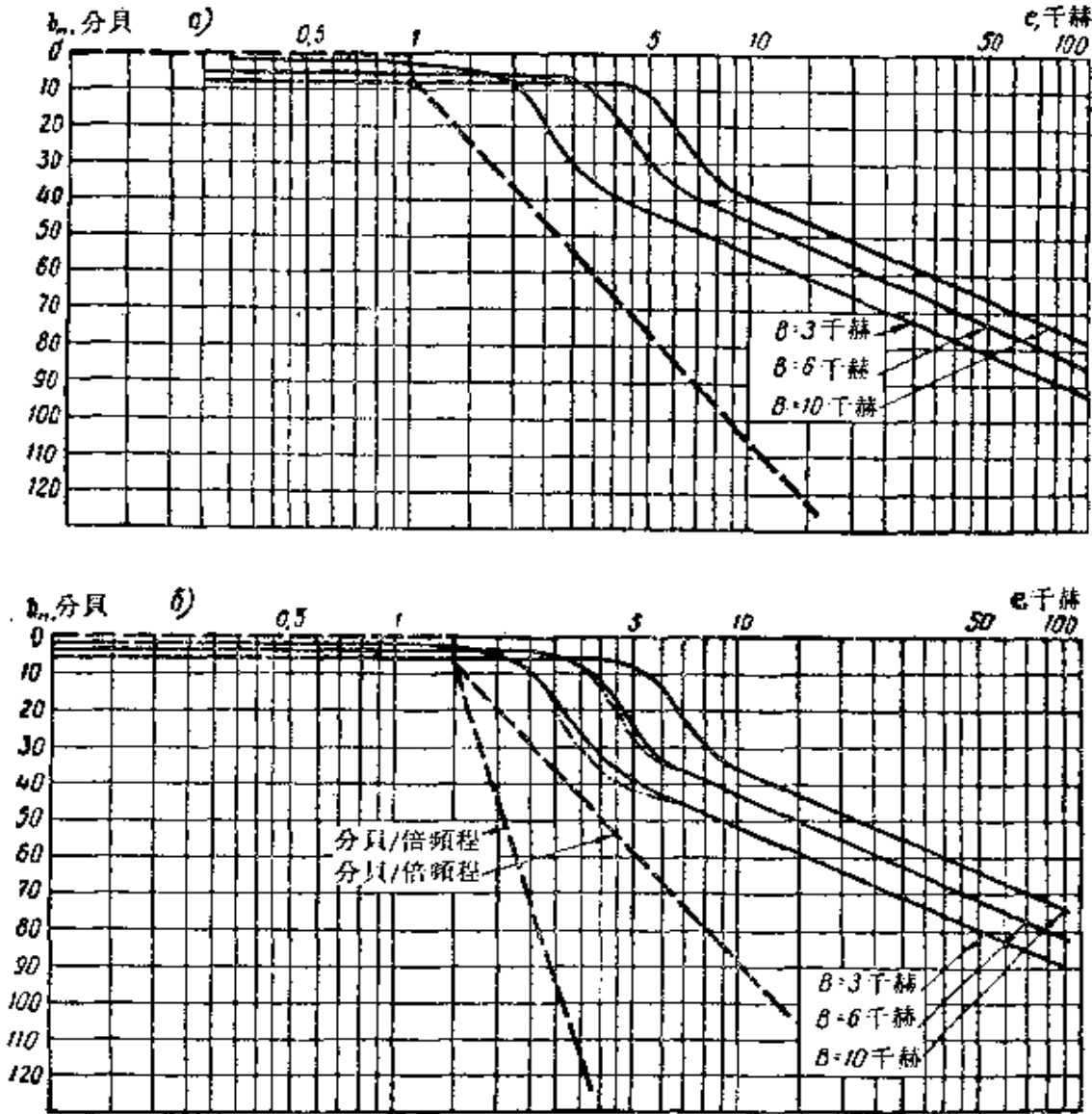


图 12.15 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。
 接收机的频率特性用虚线给出： e ——相邻频率间的差值；
 B ——干扰信号的必要频带宽度。干扰辐射——电话， b_n ——
 干扰信号的衰耗，分贝。接收机特性：a) 不均匀性为 6 分贝
 的频带宽度——2 千赫，衰耗变化——30 分贝/倍频程；b) 不
 均匀性为 6 分贝的频带宽度——3 千赫时，衰耗变化：
 ———— 30 分贝/倍频程
 - - - - 90 分贝/倍频程

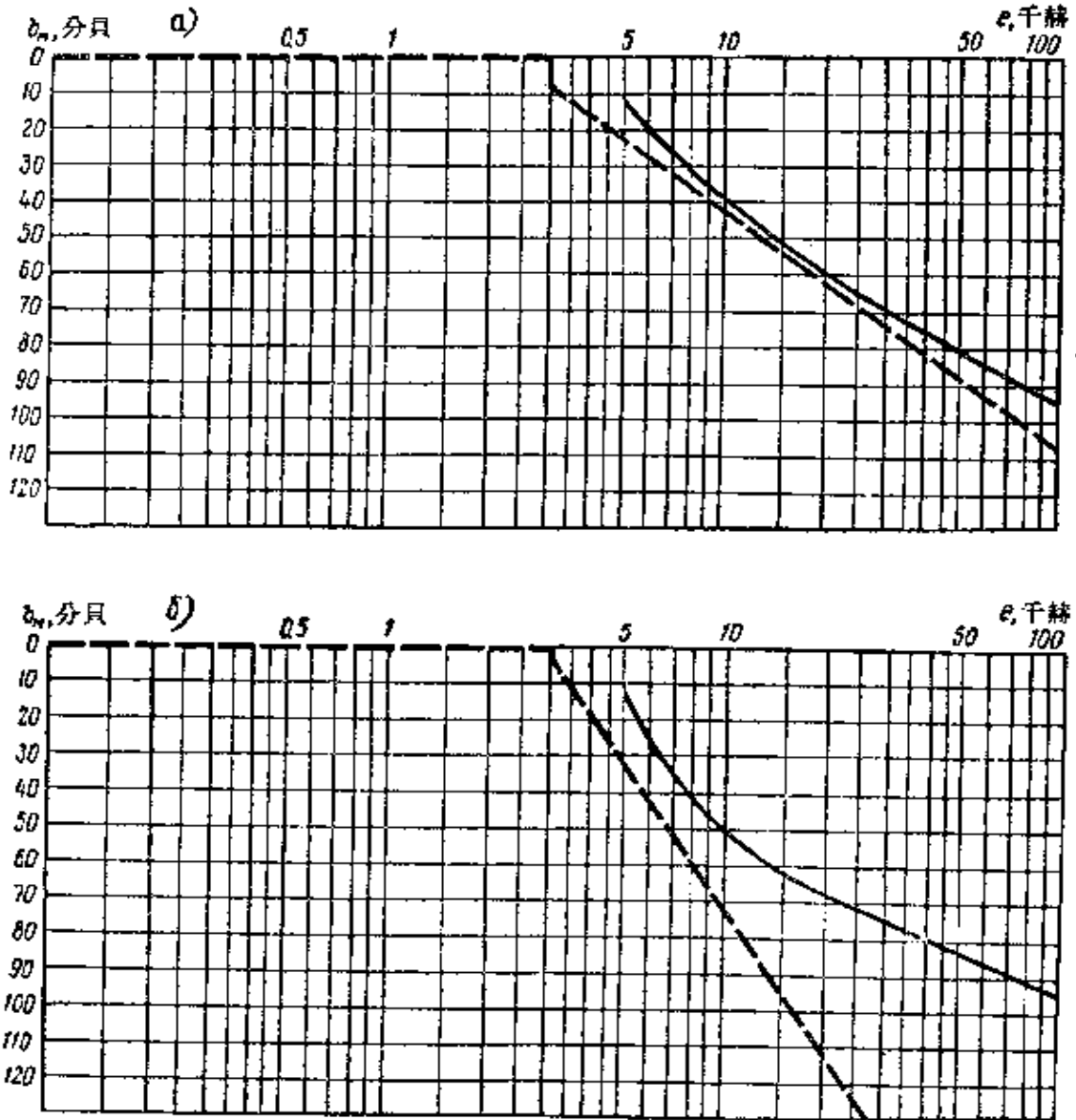


图 12.16 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。
接收机的频率特性用虚线给出。副载波的频率调制在1500至2300赫的界限内， $N=1000$ ，此处 N ——1分钟内所可能传输的白色与黑色单元的最大数目。 e ——相邻频率间的差值， b_m ——干扰信号的衰耗，分贝。干扰辐射——传真电报 M_4 。
接收机特性：a) 不均匀性为6分贝的频带宽度——6千赫，衰耗变化——20分贝/倍频程；b) 不均匀性为2分贝的频带宽度——6千赫，衰耗变化——40分贝/倍频程

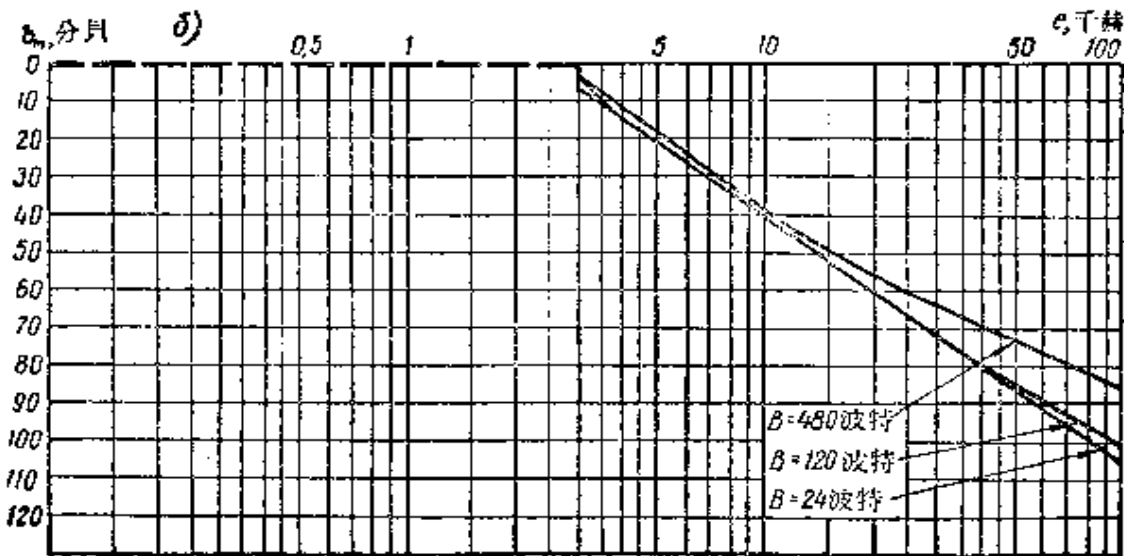
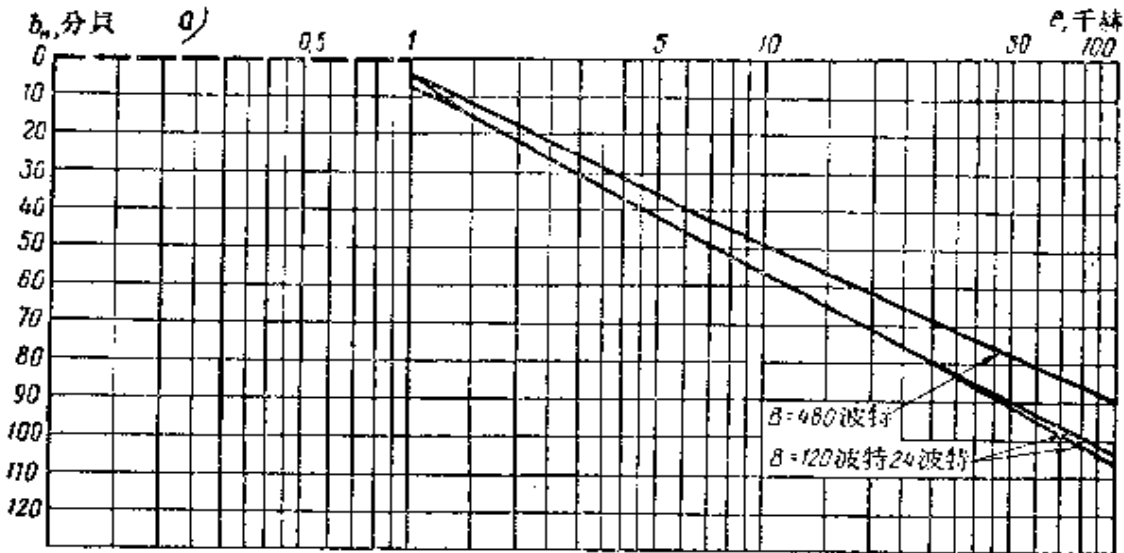
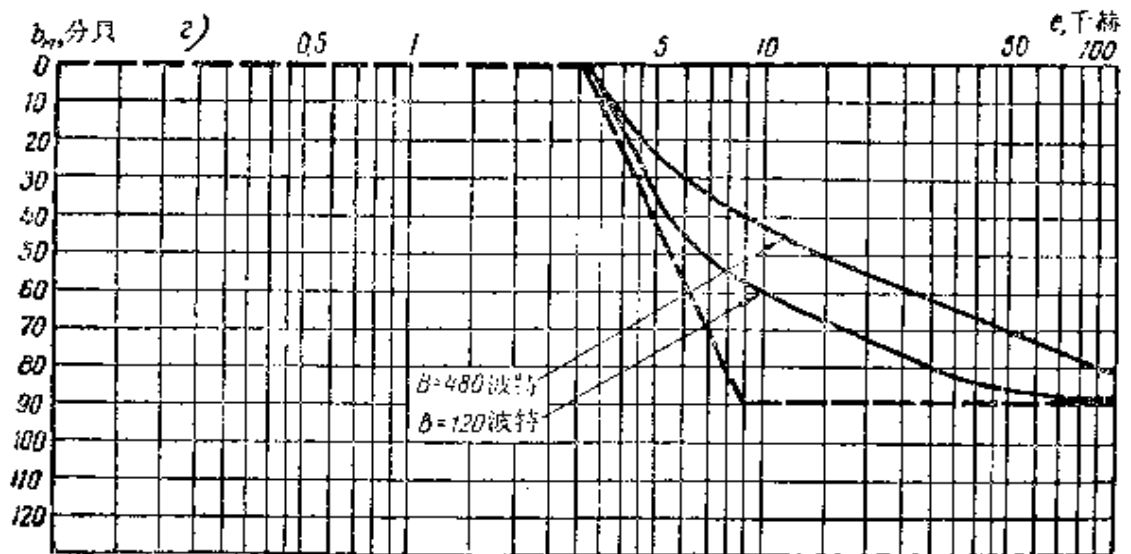
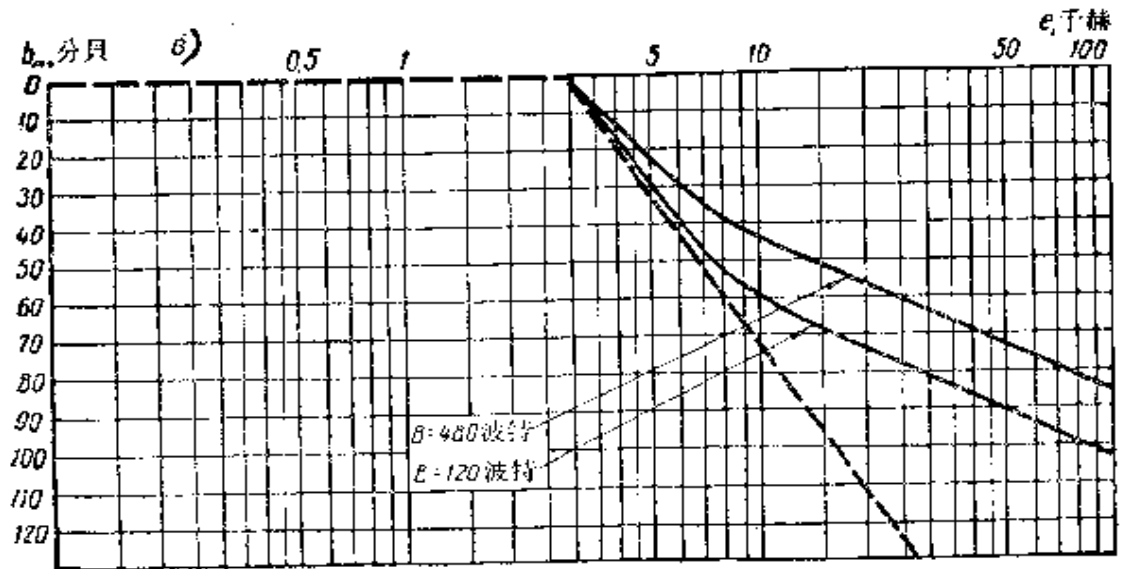


图 19.17 自干扰发射机接收的功率随波道间差值

e ——相邻频率间的差值； b_m ——干扰信号的衰耗，分贝； $rB=$

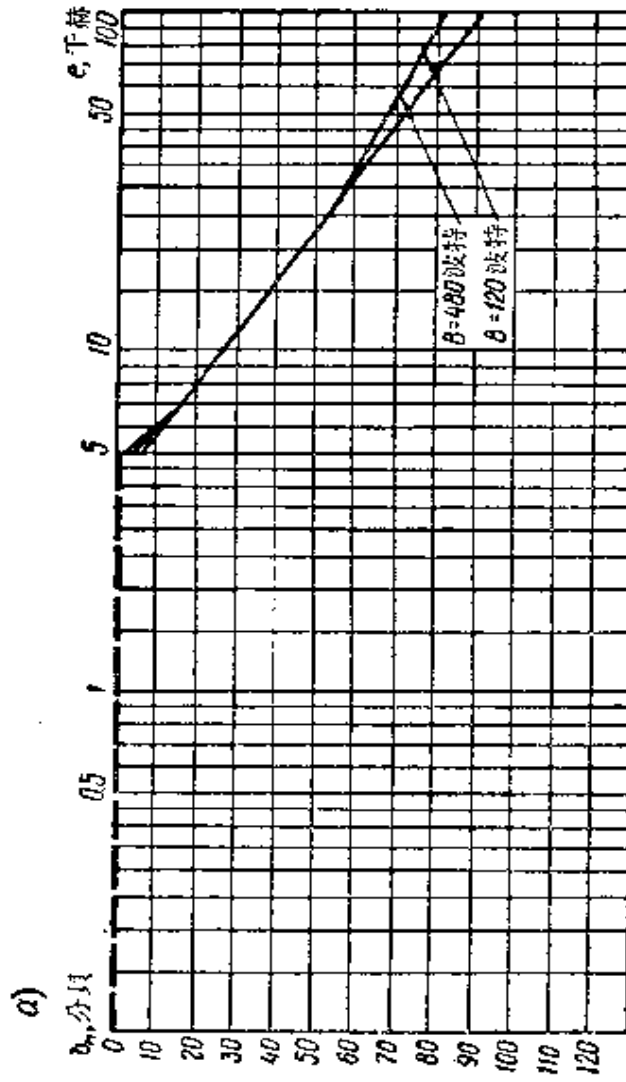
的频带宽度——2 千赫，衰耗变化——16 分贝/倍频程；6) 不均匀性为 2 分贝的频带宽度——6 千赫，衰耗变化——40 分贝/倍频 60 分贝/



的变化。接收机的频率特性用虚线绘出：

$\frac{1}{20}$ 。干扰幅射——电报 A1。接收机特性：a) 不均匀性为 6 分贝

性为 6 分贝的频带宽度——2 千赫，衰耗变化——20 分贝/倍频程；b) 不均匀程；r) 不均匀性为 2 分贝的频带宽度——6.5 千赫，衰耗变化——
倍频程



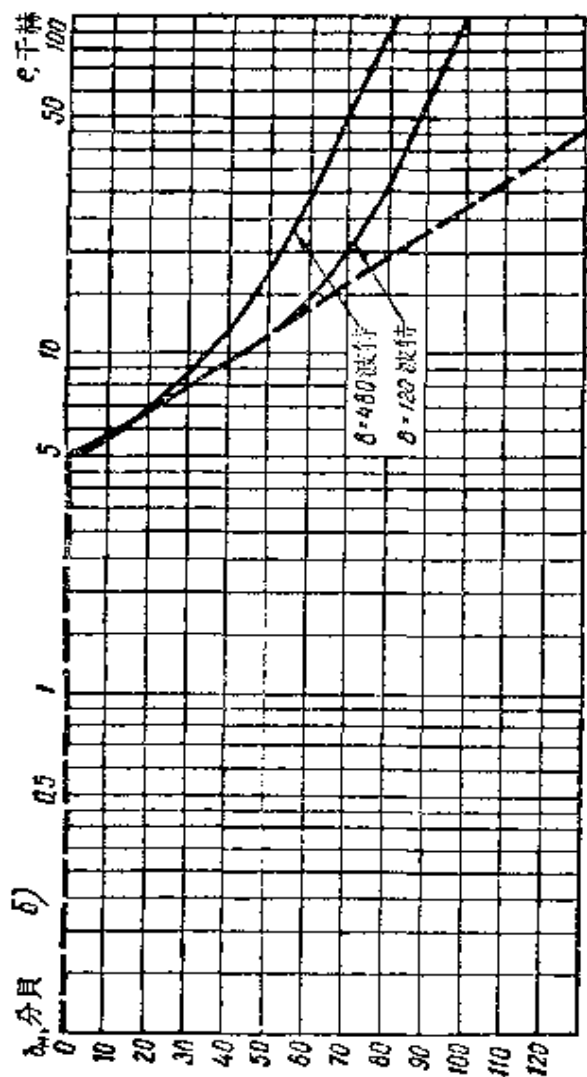


图 12.18 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。

接收机的频率特性用虚线绘出；

a ——相邻频率间的差值； b_M ——干扰信号的衰耗，分贝；

$\alpha_B = \frac{1}{20}$ 。干扰幅射——电平 A_1 。接收机特性； a) 不均匀性为

6 分贝的频率宽度——10 千赫，衰耗变化——20 分贝/倍频

程； b) 不均匀性为 6 分贝的频率宽度——10 千赫，衰耗变化

——20 分贝/倍频程

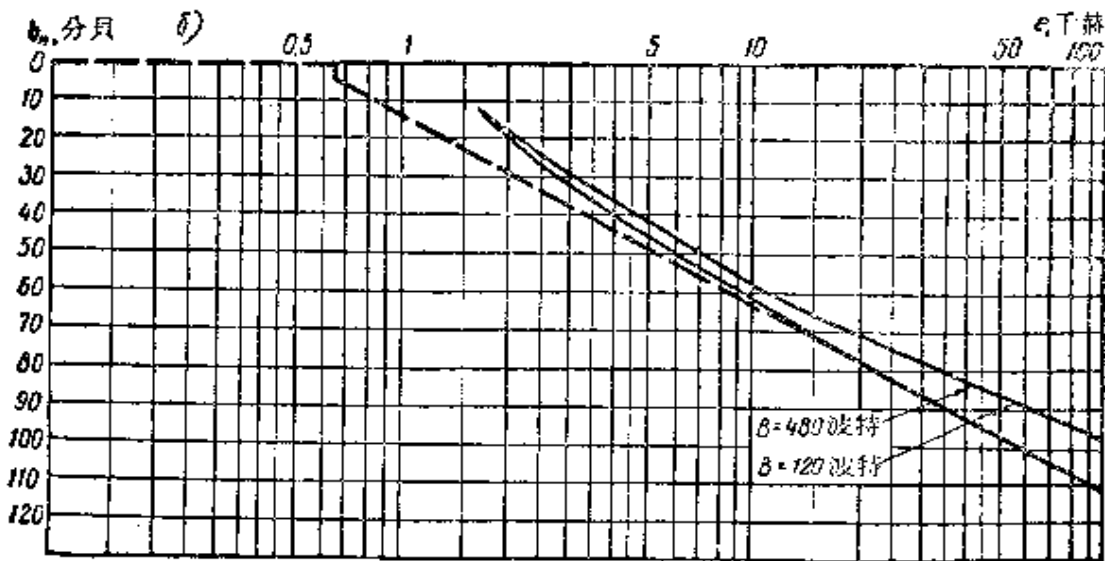
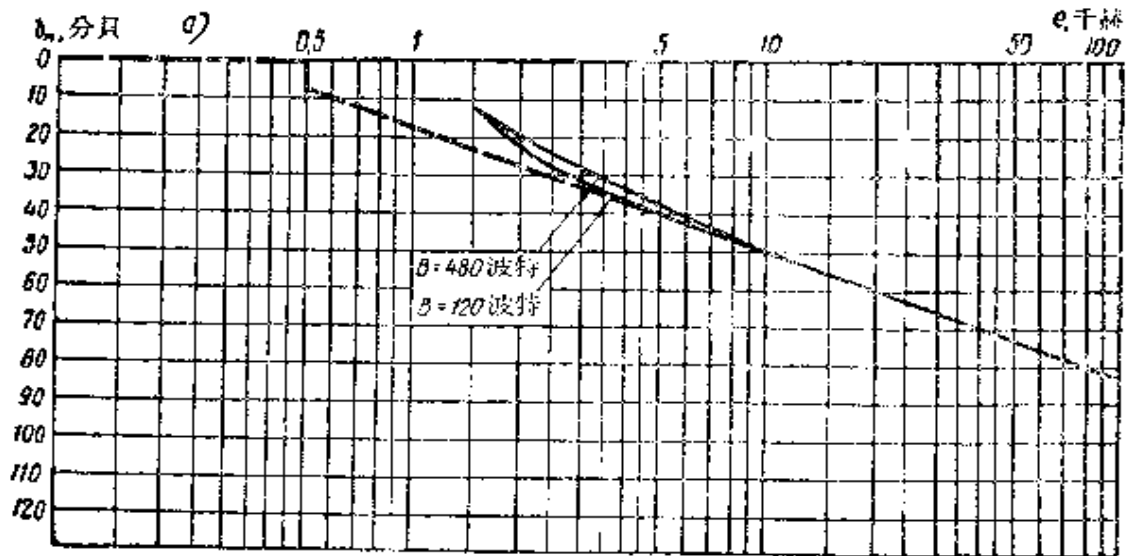
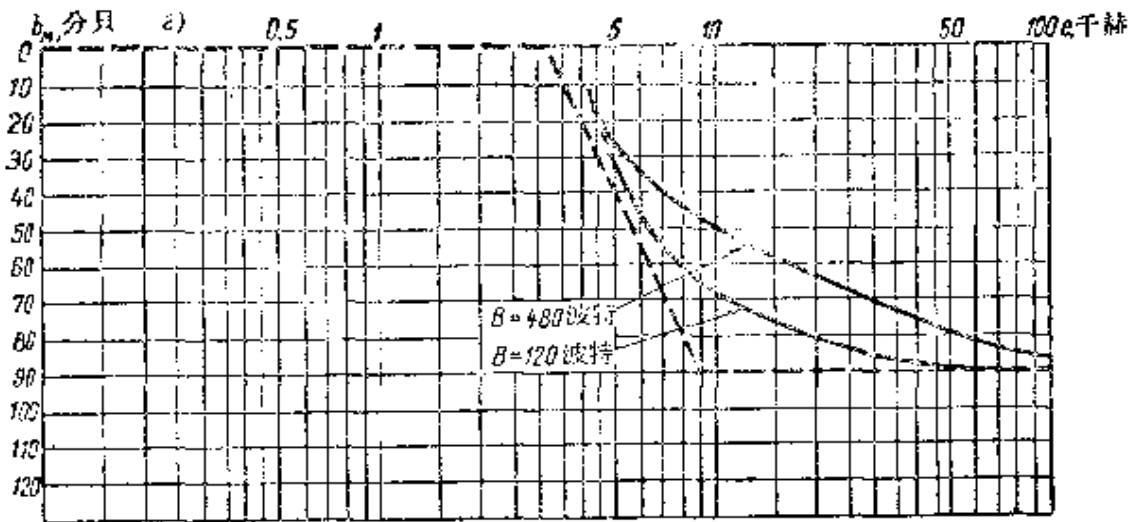
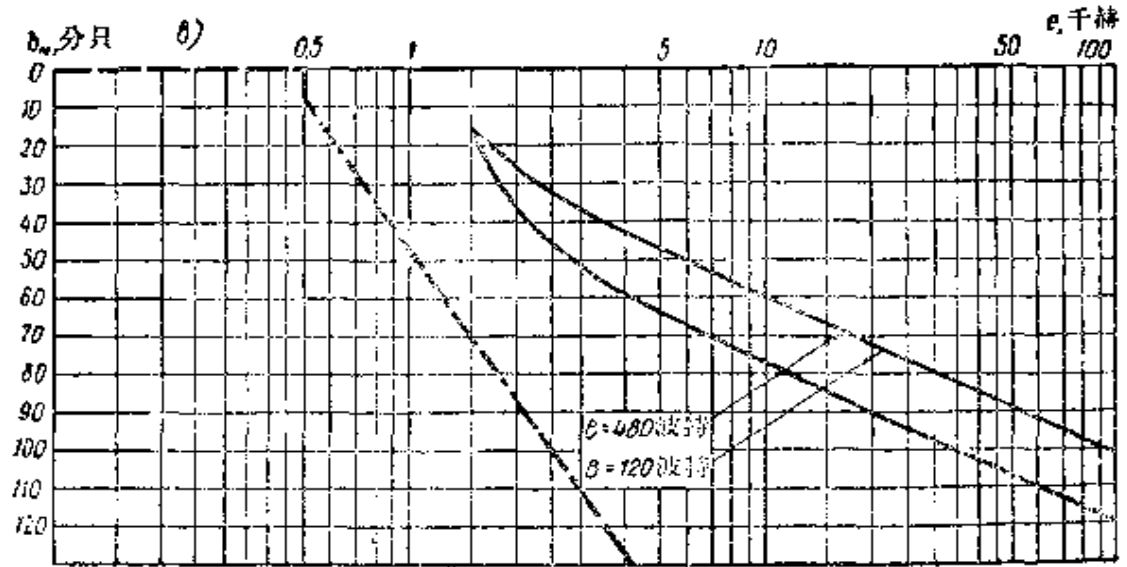


图 12.19 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。接收

a) 相邻频率间的差值; $b_{\text{ш}}$ ——干扰信号的衰耗, 分贝; $\tau B =$
 的频带宽度——1 千赫, 衰耗变化——10 分贝/倍频程; б) 不均匀
 程; в) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——1 千赫, 衰耗变化——30
 衰耗变化——60



机的频率特性用虚线绘出。电压用振幅调制，调制频率1000赫：

$\frac{1}{20}$ 。干扰辐射——电报42。接收机特性：a)不均匀性为6分贝

性为6分贝的频带宽度——1.5千赫，衰耗变化——15分贝/倍频程；r)不均匀性为2分贝的频带宽度——6.5千赫，分贝/倍频程

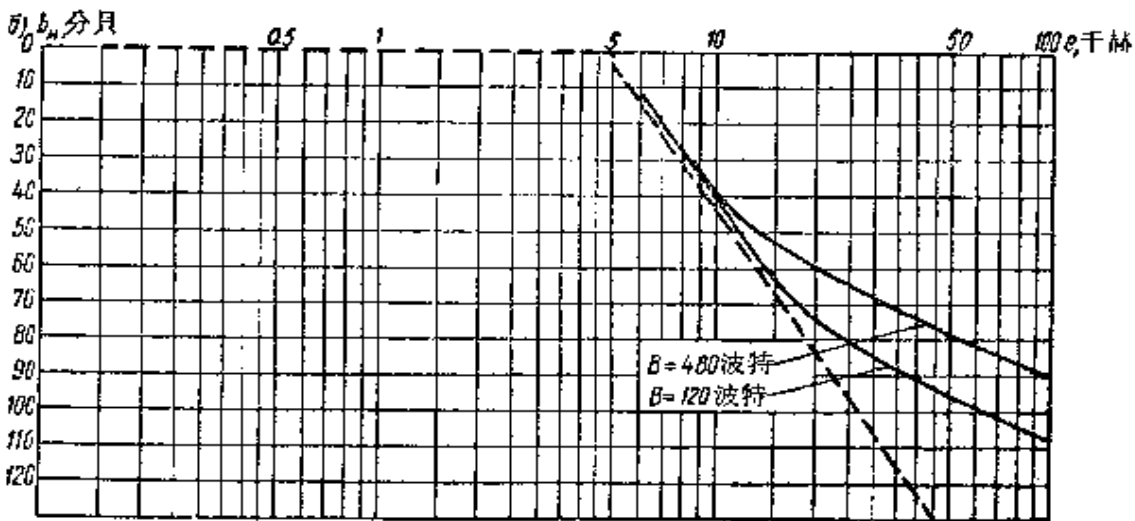
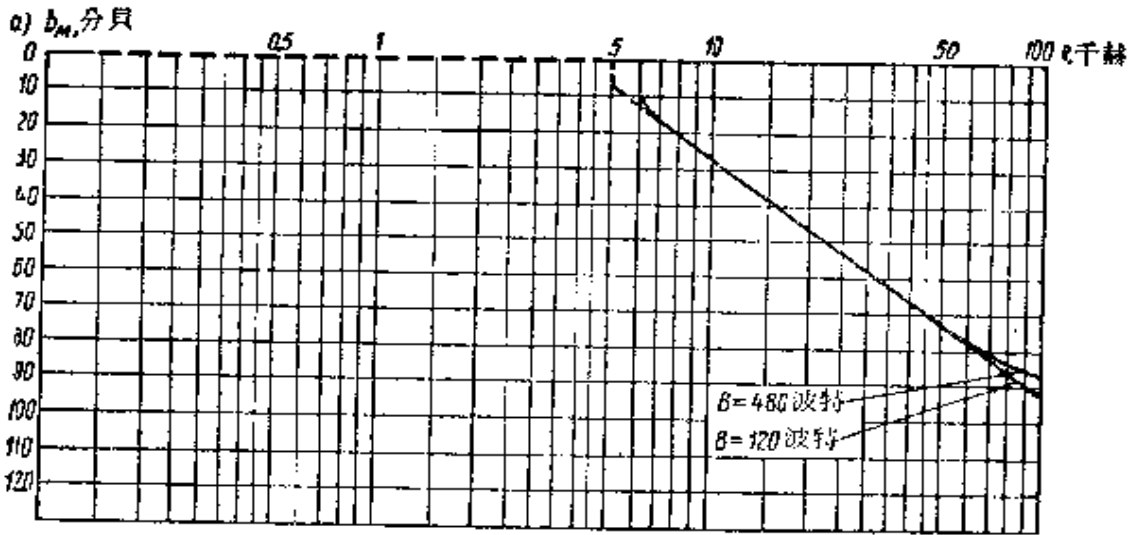
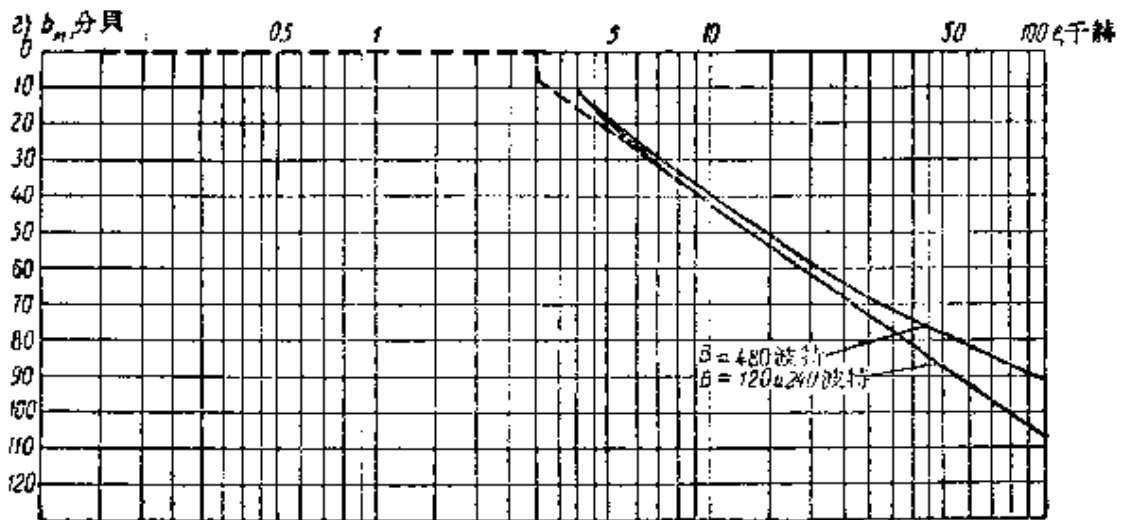
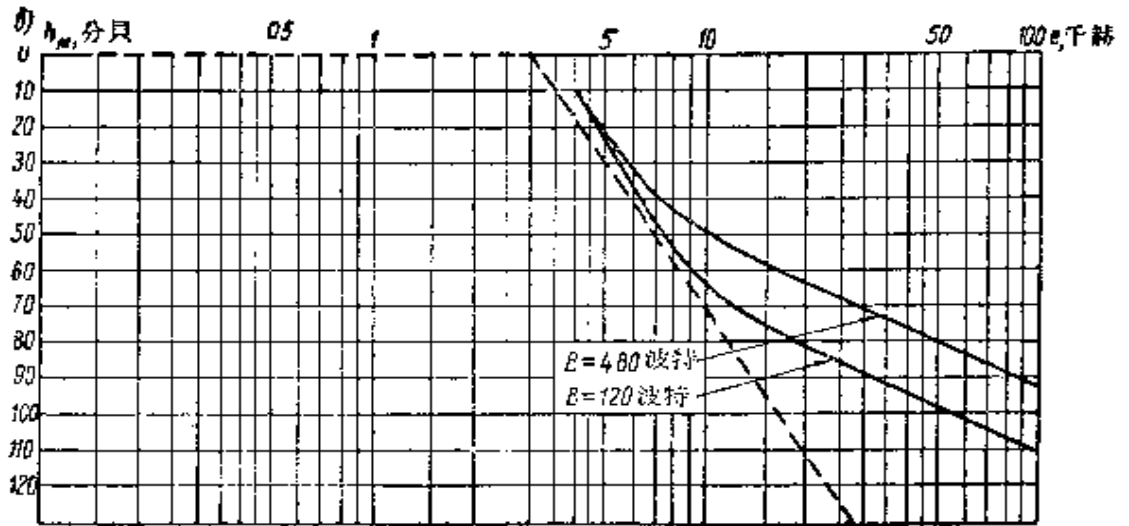


图 12.20 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。接收
 e ——相邻频率间的差值； b_m ——干扰信号的衰耗，分贝；
 $\nu B =$ 的频带宽度——10 千赫，衰耗变化——20 分贝/倍频程；
 б) 频段；в) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——6 千赫，衰耗变化——



机的频率特性用虚线绘出。电压用振幅调制，调制频率为1000赫：

1. 干扰辐射——电报 A 2。接收机特性：a) 不均匀性为 6 分贝

不均匀性为 2 分贝的频带宽度——10 千赫，衰耗变化——40 分贝/倍

衰耗变化——20 分贝/倍频程；v) 不均匀性为 2 分贝的频带宽度——6 千
20 分贝/倍频程

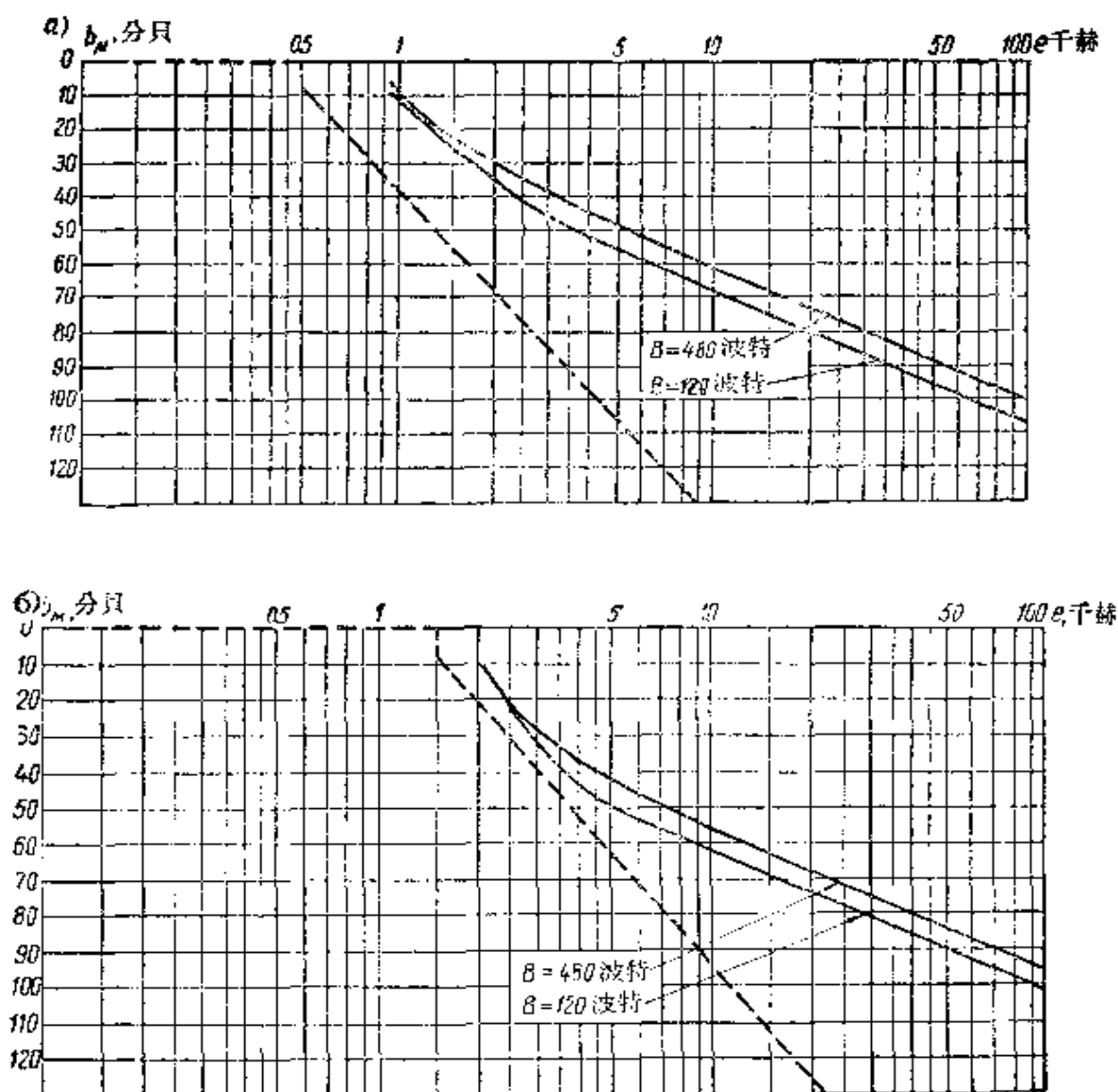


图 12.21 自干扰发射机接收的功率随波道间差值的变化。

接收机的频率特性用虚线绘出；

e ——相邻频率间的差值； b_M ——干扰信号的衰耗，分贝。频率偏差 ± 425 赫。干扰辐射——频中速控的电报。

接收机特性：a) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——1 千赫，衰耗变化——30 分贝/倍频程；b) 不均匀性为 6 分贝的频带宽度——3 千赫，衰耗变化——30 分贝/倍频程

带宽度之比。在图 12.12 上对不同的接收机绘制了相邻波道间的最小差值与干扰辐射所必需的频带宽度之比(用分贝表示)。当绘制图 12.13—12.15 的曲线时,曾利用了这两个图,借图 12.13—12.15 的曲线,可确定在干扰信号的不同衰减值下,所需信号和干扰的中央频率间的必需差值。

г) 传真电报(A4) 对传真电报只研究了载波振幅由副载波所调制,副载波的频率随着调制而在 1500 至 2300 赫的范围内变化的情形。假定信号的形状为矩形,一秒内传输的白色与黑色单元总数等于 1000。在图 12.16 上示有能用以确定两传真电报发射的载波频率间的最小差异与干扰信号衰减的关系曲线。

д) 不同类型发射间的干扰 对于不同的情形,已经算出一些可用以确定不同类型的两发报频率间的必要差值,以及发报与发话频率间的必要差值(这些发报与发话遭受到发报辐射的干扰作用)的曲线。这些曲线示于图 12.11—12.21。

第十三章 信号在发射机中的形成

本章讨论有关选择无线电通信用脉冲形状的一些实际情形,并且指出:在每一个别情况下脉冲形状的选择,需根据对通信系统的具体要求和通信系统的工作条件来确定。

给出了在发射机键控回路中所用滤波器的简图,并给出保证滤波器具有所需特性的线路图。

列出了振幅键控与频率键控时、经过滤波后所获得的频谱特性,由这些特性可以看出,滤波对利用无线电频谱大有改善。

叙述了形成信号用的非线性设备。

§ 13.1. 选择脉冲形状的一些实际建议

选择信号的最佳形状是一个很大且与多方面有关的问题。在这里我们只从更好地利用无线电频谱的要求出发提出某些看法。

我們假定，最佳脉冲形状系指在给定传播条件和辐射类型下，能于最好地利用发射机功率和无綫电頻譜的同时，保証所要求的通信傳輸质量的形状。

选择信号最佳形状的困难在于，利用无綫电頻譜的有效度和由于良好地利用发射机功率所带来的好处，很难以同一单位表示（尽管如从公式 (B. 1) 可看出，在这方面有某些可能性）。事实上，如果有一个模型能使公式 (B. 1) 实际可行，那末，我們就有了一种頻带寬度和信号干扰比能互相替换的系統；于是，把頻带寬度縮減 10%，就等效于把发射机的功率增大一倍。

然而，实际的无綫电通信系統距离这种理想的系統还很远，且不可能由于增加傳輸頻带寬度或增加信号干扰比，而将波道的通过能力增大到象理想系統中可能达到的那种程度。在实际的无綫电通信系統中，除了頻带寬度和信号干扰比以外，还有其他一系列因素影响波道的通过能力，例如衰落、发射机与接收机頻率的不稳定性等等。在选择无綫电通信系統时，应当考虑到设备的簡單和实现可能性，也要考虑设备的成本和安装费用。公式 (B. 1) 沒有考虑上述一类因素。因此，实际上所考虑的一些作用因素，虽然很难加以比較，但使我們可以接近于最佳的信号形状。

利用周期的矩形信号进行振幅鍵控时，随着頻率的增長，頻譜的包絡綫仅以每倍頻 6 分貝的速度減低，由此而使頻譜的能量分布在很寬的頻带上。

下面用一个数值例子来闡明这一点。假定以 200 波特的速度进行傳輸。頻譜分量的振幅将如下：

頻率, 赫	頻谱分量振幅	
由載波起讀数	絕對值	分貝
0	$\frac{1}{2\pi}$	-6.0
100	$\frac{1}{\pi}$	-9.9
300	$\frac{1}{3\pi}$	-19.5

500	$\frac{1}{5\pi}$	-23.9
700	$\frac{1}{7\pi}$	-26.8
900	$\frac{1}{9\pi}$	-29.0
1100	$\frac{1}{11\pi}$	-30.8
等等		

这样，偏离载频 1000 赫时，频谱的包络线相对于未键控载波电平减低了 30 分贝，这是颇为有利的。然而，当频率更偏离 1000 赫，亦即总共由载波偏移 2000 赫时，则包络线只再减低 6 分贝，即总共为 36 分贝；当频率再偏移一个倍频程，亦即达到 4000 赫时，包络线将总共只低于载波电平 42 分贝。显然，在这样的频谱减低速度下，随着频率的增加，将在相邻波道中产生很大的干扰。

由上述例子可以看出，必需形成能减低在相邻波道中的干扰作用的信号。在一般发射机中，振幅键控在给定级上进行，而在工作于 C 类状态的下一级中的限幅作用，使直接在键控级后形成信号成为无效。因此在一般的发射机中，为了形成信号，必须将随后一级转换至 B 类状态，这虽然在一定程度上降低了发射机的效率，但却提高了总辐射功率。如果认为阳极电流脉冲的高度是常值，那末当截止角由 75° 变化至 90° 时，振荡功率增加了 9%，而效率减低 5%。接近于 90° 的截止角，容许在较小的激励下工作。从减少谐波来说，B 类状态也是有利的。

频率键控能较容易地形成信号，因为在这种键控下，发射机放大器的非线性性质不会在其输出端上产生输入电压中所没有的边频。

在第六章中确定了传输频率键控的矩形与正弦形信号所占用的频带宽度值，亦即讨论了具有最大圆化与最小圆化的两种极限情形。比较所得到的数据表明，在频率键控下，信号的形成所降低的频带宽度不象振幅键控时那样大。然而不能忽视频率键控下形成信

号，因为它大大地減低了带外輻射。

現在我們來討論振幅鍵控与頻率鍵控下，确定如何选择信号形状的一些意見。如同第六章中所指出的那样，在振幅鍵控时，傳輸所占用的頻帶寬度是由調制信号的頻帶來确定的。因此，首先应当考虑利用占有最小頻帶的“理想”脉冲的可能性。然而与此同时，应当理解到此种脉冲具有如下特点：

- 1) 具有圓化的頂部；
- 2) 当頻率增加时，带外輻射的減低速度較小。

讓我們从实际角度來討論一下“理想”脉冲的这些特点的意义。考虑到在一般的接收条件下，当采用限幅器时，只是由脉冲的下部来决定接收机輸出电压的大小，当脉冲具有圓化的頂部或削尖的頂部时，接收机輸出上的信号的持續時間將发生变化，从而可能引起偏倚和扰乱。如果考虑到，国际上对振幅鍵控推荐的建立時間为 $\frac{\tau_y}{\tau} = 0.2$ ，那末“理想”脉冲（其 $\frac{\tau_y}{\tau} = 0.365$ ）不适宜于在衰落的条件下工作。在这种条件下，梯形脉冲或 ξ 值不小于 0.5 的余弦-平方律圓化脉冲比較适宜。例外的是当接收条件稳定（沒有衰落）的情况；此时可以利用接近于“理想”脉冲的頂部圓化脉冲。同时也应当注意到，信号的圓化減少了集中于脉冲中的能量。我們用例子來說明这一点。对于按 n 次余弦規律所形成的信号，在不同的 n 值下，与脉冲持續時間有关的脉冲中的能量等于：

脉冲形状	脉冲中的能量①
余弦形	$\frac{1}{2}$
余弦-平方形	$\frac{3}{8}$
余弦-立方形	$\frac{6}{16}$

① 集中于矩形脉冲中的能量取为 1。

上列数字表明，如果当脉冲形成时，希望在其中保留原来的能量，那就必须增大发射机的功率。自然，在多数情况下，增加小功率发射机的装置功率大多数要比增加大功率发射机的装置功率容易些。

任何情况下都希望增加带外辐射的减低速度，但并非在所有场合下都明确应当使其趋于一个甚么样的实际数值。如果接收机具有接近于矩形的选择特性，而相邻波道的干扰发射机的功率与所欲接收的发射机的功率相同时，那末即使是最邻近的波道且在該波道中集中了全部带外辐射能量的情况（亦即接收条件比较有利些），在該波道中的信号干扰比也不会超过 23 分贝左右。

然而在实际中，接收机的选择特性曲线不是矩形，而干扰发射机的功率可能超出所欲接收发射机的功率许多倍。且由于发射机与接收机频率的不稳定性而必须具有保护容限，使得问题更为复杂化了。

还应当考虑到，频谱随频率而减少的速度仍不能充分表征信号；同样重要的是，频谱开始迅速减少的频率不是太高，亦即在最邻近的波道中带外辐射就已经大大削弱了。对按 n 次余弦规律形成的脉冲所进行的研究表明，当 $n=1$ 时，与 $1/k^2$ 成比例的减少开始于 $k > \pi/2$ ；而当每一次将 n 增大 1 时，频谱迅速减少的起点沿 k 轴延后 $\pi/2$ 。考虑到对遭受衰落的线路而言，波道的宽度不小于 $2.5 \pi k$ ，在最邻近的波道中，就已经可以在 n 值不超过 3 下（亦即当余弦-立方形脉冲时）获得与 $1/k^{n+1}$ 成比例的频谱减少。

对于形状由表示式 (5.21) 与 (5.22) 所确定的信号来说，当 $k > 5/(1-\xi)$ 时，频谱开始比例于 $1/k^4$ 而减少。

由上述可见，在形状上接近于“理想”脉冲的脉冲，可用于下列情况，即发射机的功率不大，而所用的接收机具有良好的选择特性。

具有圆化的顶部以及较大的带外辐射减低速度的脉冲（例如余弦-立方形脉冲），在下列条件下适用：

- 1) 稳定的传播条件；

- 2) 輻射功率小;
- 3) 接收机的选择性不高。

如果上列第一个条件不能滿足, 亦即信号的場不穩定, 那末, 为了增加带外輻射的减低速度, 可以如 § 5.4 中所述, 修改信号的边緣。

又由第七章, 我們知道, 当頻率鍵控时, 宜于采用所占頻带十分窄、且具有較高带外輻射减低速度的梯形脉冲和具有正弦律圓化的脉冲。

这样, 在每一个別情况下脉冲形状的选择是根据对通信系統所提的具体要求和系統工作时的条件来确定的。

§ 13.2. 鍵控回路中的綫性濾波器

图 13.1 示有在发射机鍵控回路中利用滤波器的簡图。

和任何綫性系統相同, 綫性的电滤波器可以或者由它的頻率特性来确定, 或者由单位跃变或单位脉冲加于其輸入端上时所有的过渡过程来确定。按頻率特性来计算滤波器在电信中最为流行。电视和脉冲技术則要求确定瞬态特性, 且現在已經成功地发展了具有給定瞬态特性的滤波器設計方法。

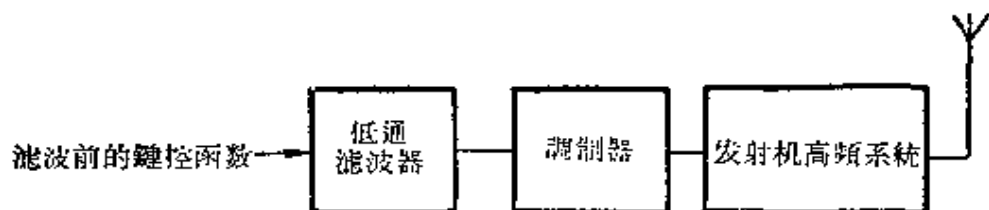


图 13.1 在发射机鍵控回路中利用滤波器的簡图

本书不討論滤波器, 只是确定鍵控回路中所要求的滤波器的主要指标, 并討論保証有这些指标的滤波器例子。在实际条件下, 鍵控回路中所要求的滤波器应当有下列三个主要指标:

(a) 滤波器中的过渡过程, 它由接近于衰耗为 20 分貝点前的低頻区域内的滤波器頻率特性演变过程来确定。

(6) 滤波器频带宽度与键控频率之比，我们将称之为滤波器的相对频带，亦即

$$T = \frac{\Delta f_c}{f_B},$$

式中 Δf_c ——电平为 6 分贝的滤波器的频带宽度；

f_B ——键控频率（赫）；

(B) 带外衰耗，亦即频率特性在衰耗为 20 分贝的界限点外的演变过程。

比较频率特性不同的滤波器的过渡过程（这里我们不进行这种比较）表明，滤波器输出端上键控函数的增长速度（当在滤波器输入端上加进单位阶跃或单位脉冲时）与频率特性的形状无关，而由滤波器的频带宽度 Δf_c 来确定；电压在等于 $\frac{0.4}{\Delta f_c}$ 的时期内（与滤波器的其他指标无关），由涌进到挤出大约变化至原来的 $\frac{7}{10}$ 。过渡过程往后的演变（在振幅等于 0.7 的点以后）特性与速度，由指标 (a) 来确定。

由于存在着许多不同的通信系统，故我们首先来讨论一下影响选择指标 (a), (6), (B) 的一般要求，而后来确定适用于不同情形的滤波器特性。

指标 (a) 确定互相干扰的大小，这种干扰是在离开传输消息需用的频带很远的区域发生的。

这一指标对振幅-键控式发射机来说颇为重要，因为它确定信号电压的峰值，而尖头信号表明发射机平均功率利用得不充分。当频率键控时，保持最小的起伏不象振幅键控时那样重要，因为当频率键控时，瞬时频率中的起伏不会在高频电压振幅上形成尖峰，或者在某种程度上表征所利用的发射机平均功率。然而，如果发射机预定要借利用某些频率来进行多路工作时，那末使滤波器具有最小的建立时间和极小的起伏，从而保证确定每一个频率值时有较高精确度是重要的。

从消息传输的观点来看，当用两种频率工作时，如果接收设备容许以适当的方式利用通常的信号，则键控电压的精确形状（过渡过程的形状）无关紧要。在实际的条件下，接收频率-键控振荡的一般设备便足够将频率加以区分，而信号在其中逐一地积分起来，这样就能利用具有最小起伏和最少建立时间的过渡过程。这种过渡过程的优点在于，在键控速度变化下，对该滤波器而言，键控电压具有同样的形状，结果振幅将不会有任何低落，而这与在接收机中选择信号（如果进行这种选择的话）的观点是一致的。

于是可以认为，在大多数情况下，希望滤波器能具有最少建立时间和最小起伏的过渡过程；这点将作为讨论其他指标的前提。

指标 (6) (亦即 T) 在研究 T 对键控振荡形状的影响后可最好地予以确定。指标 (6) 的选择与指标 (a) 有关。对滤波器中不同过渡过程的曲线研究（此处我们不进行这种研究）表明，下列电码信号的平坦部分与不同的 T 值相对应：

$T = 1.6$	0%	(余弦脉冲)
$T = 3.2$	50%	
$T = 16$	90%	
$T = \infty$	100%	(矩形脉冲)

如果所采用的通信系统同步得很好，且频率高度稳定，那末希望选取 2 或 3 左右的较小 T 值。当利用起止式的电报设备和有较大的载频漂移时，最好根据稳定性而利用 4 至 16 的 T 值。

当经过接收机内的低频滤波器（该滤波器至少应当有与发射机滤波器相同的频带宽度）以后，在接收机的输出端上获得实际的振荡形状。如果在发射机的键控回路中和接收机的检波器输出端上利用同样的滤波器，那末它们每一个的相对频带应当增加 1.4 倍左右。

选择指标 (b) 时要考虑下列因素：经济观点（所利用的滤波器节数和类型），相邻波道间的频率差异，与相邻波道中所利用的接收机的选择特性。

满足上列一些基本要求的滤波器的实际特性，应当是一条位于图 13.2 中划有斜线区域内的平滑曲线。对频率超过滤波器频带宽度 Δf_c 4 倍的振幅-键控式发射机来说，衰减应当不低于 40 分贝。对频率-键控式发射机来说，在该频率的衰减应当为 40 分贝（当 $m < 5$ ）和 30 分贝（当 $m > 5$ ）。在这样的频率特性下，足以保证起伏低于总电压变化 4% 的过渡过程。

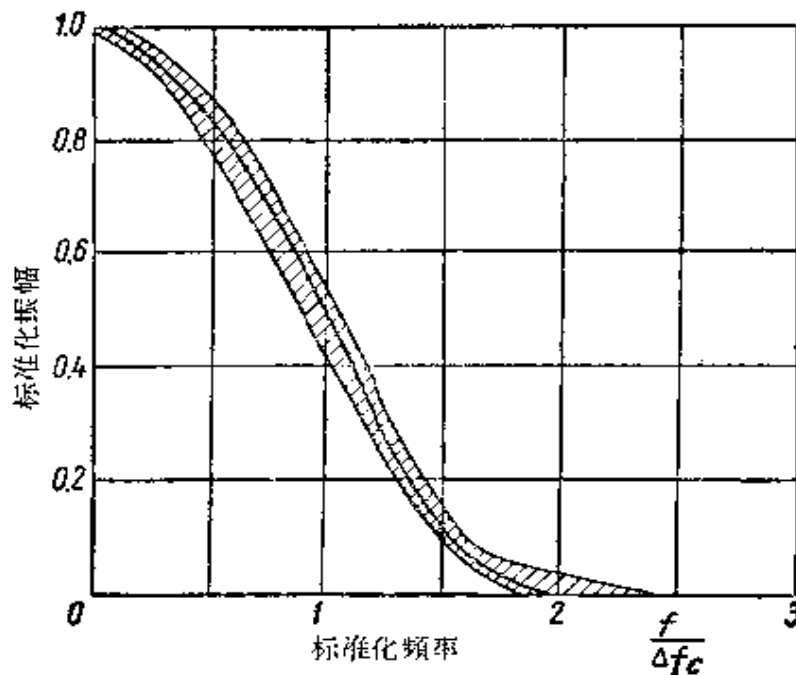


图 13.2 设计振幅-键控式与频率-键控式发射机的键控滤波器的标准

图 13.3 中示有能保证所需特性的滤波器电路图。该滤波器按键控频率 60 赫来考虑，其截止频率选定为 200 赫。它的频率特性在形状上介于余弦-平方曲线与高斯曲线之间。如果希望获得适当的过渡过程，那末电容、电感与品质因数 $Q = \omega L/R$ 的实际值以及输入电阻和负载电阻，均应当保持着 5% 至 10% 的精确度。如果需要大大地减小电感的 Q 值，那末串联接入电阻要比并联好一些，它可以增加滤波器的带外衰减。为了获得最佳的过渡过程，象图 13.3 线路中所表示的那样，在滤波器的输入回路中接入 560 欧的串联电阻是很重要的。

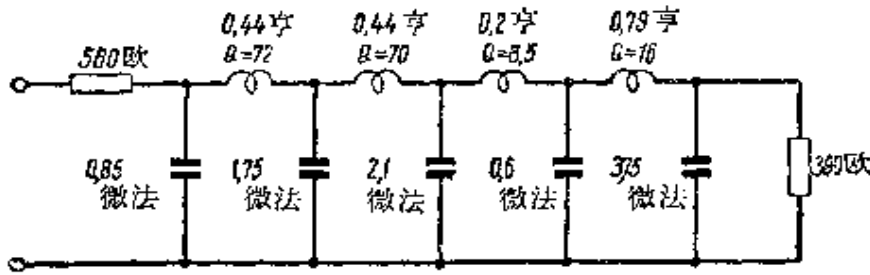


图 13.3 鍵控回路中的電濾波器圖

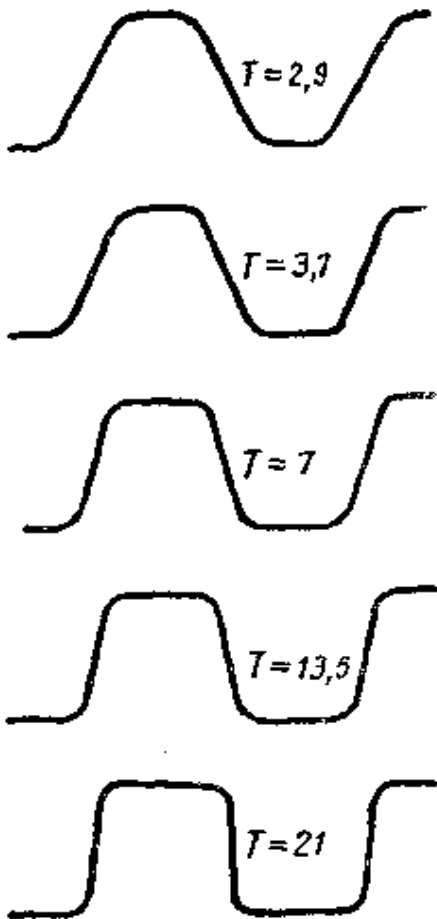


图 13.4 濾波器輸出端上鍵控振蕩的形狀

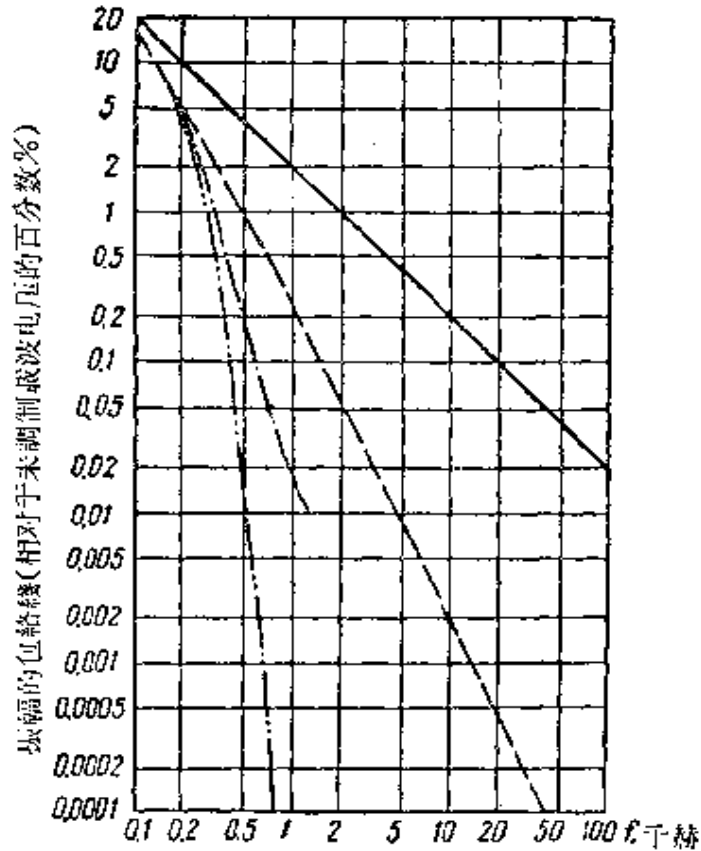


图 13.5 振幅鍵控時，發射機所產生的頻譜的包絡綫。鍵控頻率——60 赫。

- 無濾波時的矩形振蕩。
- 單節 RC-濾波器 ($T=3.3$) 時的振蕩。
- · - · 有四節 LC-濾波器與非線性放大器時的振蕩。
- 四節 LC-濾波器 ($T=3.3$) 時的振蕩。

图 13.4 中表示不同的 $T = \frac{\Delta f_c}{f_B}$ 值下, 在滤波器输出端上所获得的键控电压的形状, 式中 Δf_c ——电平为 6 分贝的滤波器通频带, f_B ——键控频率。

图 13.5 示有图 13.6 上所示的、下列四种振荡形式下振幅-键控发射机输出端上频谱的包络线: (1) 无滤波; (2) 由一个 RC 节组成的滤波器; (3) 当 $T=3.3$ 时, 具有如图 13.3 所示线路的滤波器; (4) 条件与上相同, 但发射机中有限幅。从曲线可以看出, 在限制带外辐射方面, 单网孔 RC -滤波器的效果比经过合理设计的 LC 滤波器差得多。同样很明显, 即使轻微的限制或接在键控滤波器后面一级的非线性性质不大, 也将再次显著地增加渗入相邻波道的能量。

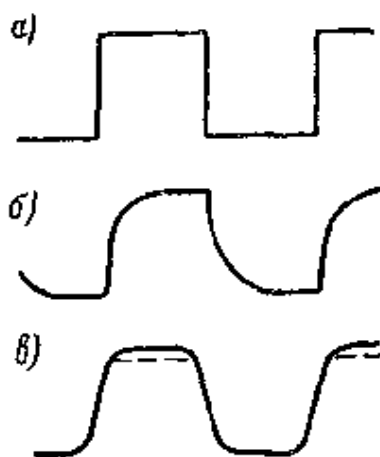


图 13.6 键控振荡的形状
a) 无滤波, $T=\infty$; b) 有单节 RC -滤波器; b) 有线路如图 13.3 所示的滤波器(虚线表示由于非线性放大所产生的振荡形状的限制)

从用图 13.7 的曲线进行计算所得到的结果可以看出, 频率键控时的滤波大大地减低了带外辐射值。

应当着重指出, 借助于许多其他滤波器结构, 可以得到所需的滤波器频率特性 (见图 13.2)。在实际中, 有时候可能限于采用结构比图 13.3 还要简单得多的滤波器。

§ 13.3. 形成信号的非线性装置

下面来叙述一下在键控回路中形成信号的装置, 它的计算要比线性电滤波器容易些。

此装置的工作原理如下: 在信号建立时刻引入固定的时间, 将矩形信号首先变换为梯形。这可利用电容器的过充电来达到; 而后将梯形的角加以圆化, 为此, 可利用键控管和高频放大器的非线性

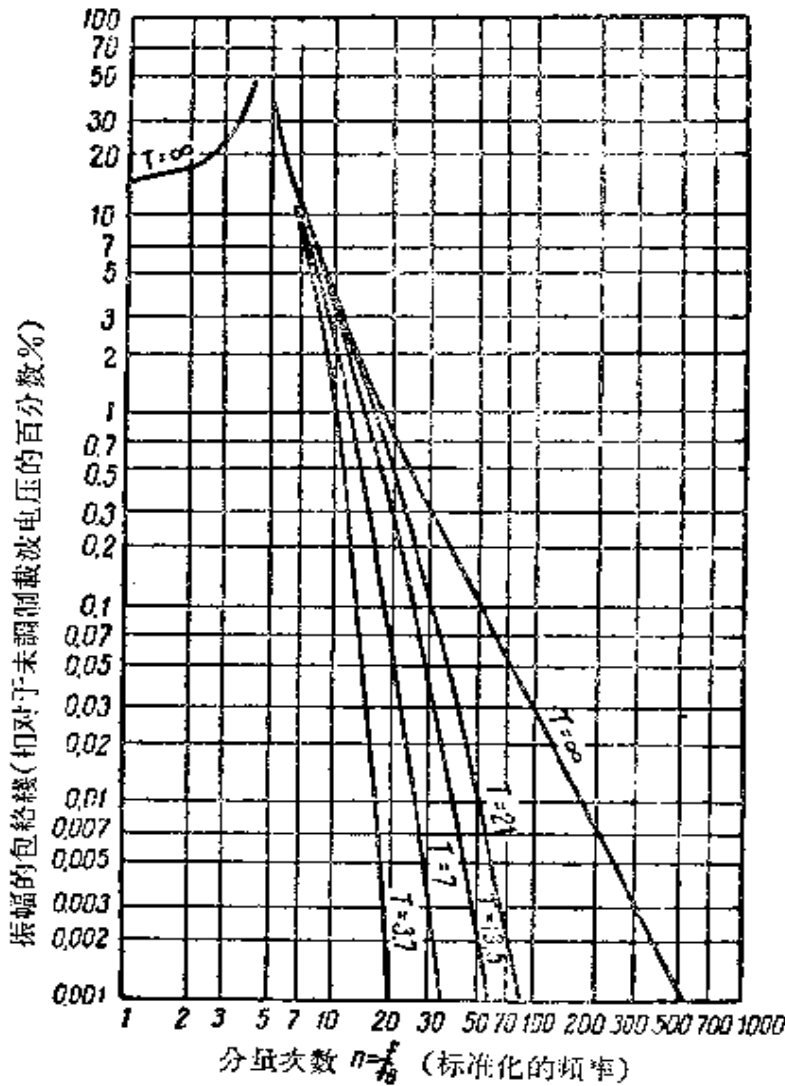


图 13.7 键控回路中具有滤波的频率-键控式发射机的频谱包络特性。

特性。

本装置的线路示于图 13.8。由单独的振荡器 H 所发出的低频电压，经过电键而加在变压器 T_p 的初级绕组上。把从两个次级绕组的每一个上所得到的低频电压加以整流。这样获得的直流电压用来供给两个三极管 J_1 与 J_2 的栅偏电压，使得当其中一个三极管开通时，第二个三极管则闭锁。当电键 M 闭合时，在 A 点与 B 点之间得到电压 U_1 ，而 C 点与 D 点之间得到电压 U_2 。管 J_2 闭锁，并且它的栅极达到负电位 ($-U_2$)。相反地，由于电压 U_1 与栅偏电压

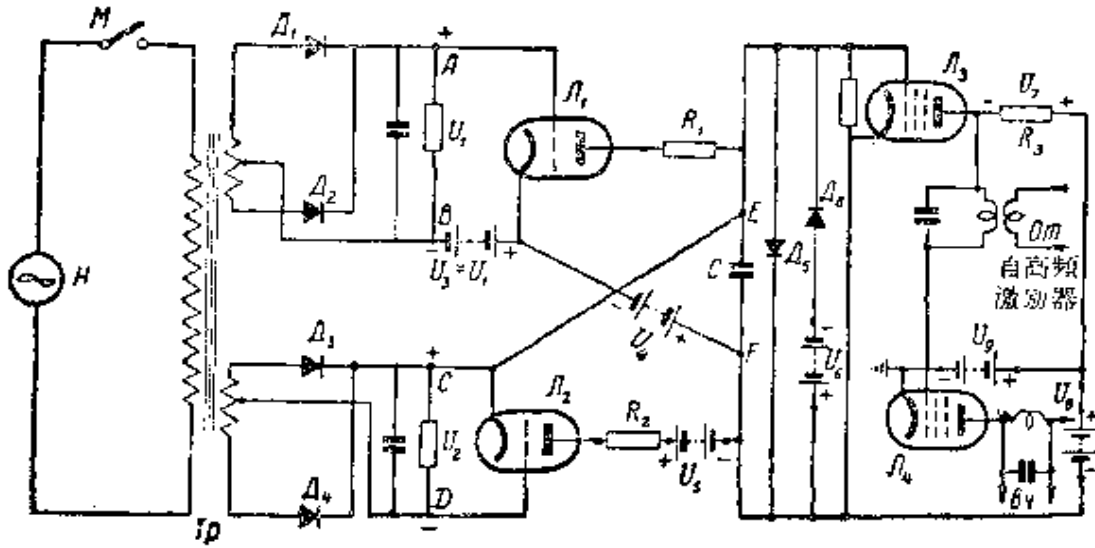


图 13.8 键控回路中固化信号装置的线路图

U_3 方向相反而大小相等，管 J_1 开通。此三极管中有电流流过，并经过电阻 R_1 而以指数规律对电容器 C 充电。如果没有限幅器 J_6 的话，在电容器 C 端子上的电压 $U_E - U_F$ 将会达到 $-U_6$ 值。实际上，只要当电压 $U_E - U_F$ 达到 $-U_6$ 的大小时，该限幅器即开始起作用。于是，在键控管 J_3 的栅极上获得电压，这电压可用图 13.9 中的曲线 abc 表示为时间函数的形式。

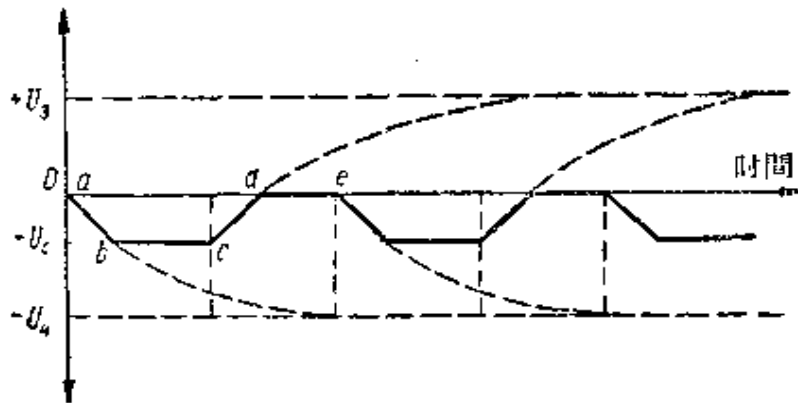


图 13.9 表示成时间函数的管 J_3 的栅极电压

当电键 M 打开时，电压 U_1 与 U_2 等于零。管 J_1 为偏压 U_3 所闭锁。管 J_2 开通，并且其栅极电位与阴极电位相同。流经此管中的电流以指数规律对电容器 C 充电。如果没有限幅器 J_6 的话，那

末电容器 C 端子上的电压会达到 $+U_B$ 的值。实际上, 只要 $U_B - U_F$ 为正时, 此限幅器即开始起作用, 因此, 在键控管 J_3 的栅极上获得电压, 这电压可用图 13.9 上的曲线 cde 表示为时间函数的形式。

于是, 我们得到了梯形信号, 变更装置的时间常数 (例如给予电容器 C 以不同的电容值), 即可调节 ab 与 cd 段的陡度。利用阳极电流 I_a 与管 J_3 栅压 U_c 的关系曲线 (图 13.10) 的斜率, 对 a 、

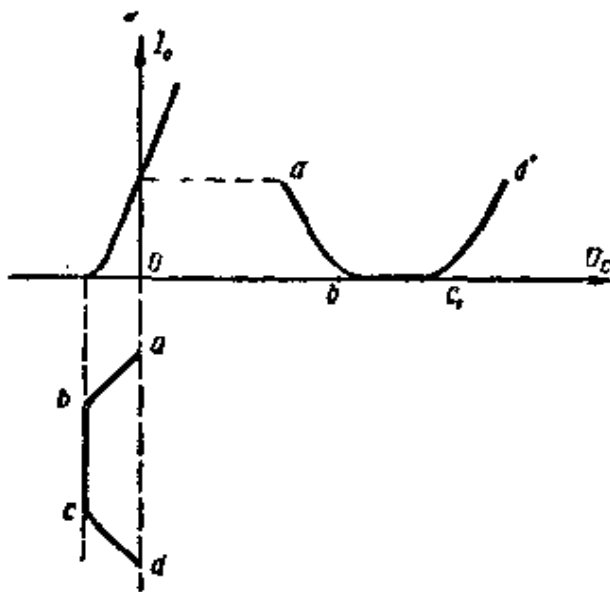


图 13.10 电流 I_a 随 U_c 变化的关系

b 、 c 与 d 点处的角度加以圆化, 便能加大带外辐射的减低速度。

键控装置作用在位于高频回路中的电子管 J_4 上 (见图 13.8)。由电阻 R_a 上所取得的电压 U_7 与偏移电压 U_9 串联起来作用在管 J_4 的栅极上, 并且该电子管栅极上的电压在每一时刻中等于 $-(U_7 + U_9)$ 。当 U_7 为最小时, 高频输出电压将最大,

于是信号颠倒过来了。在高频放大器中, 角 b 与 c 将对应于信号的最大振幅, 而 a 与 d 角则对应于零振幅。

第十四章 无綫电报发报机辐射的 频带宽度的测量

本章研究测量无綫电报辐射占用频带宽度的方法和相应器件的简图。

计算了振幅键控与频率键控下, 在包含辐射功率 99% 的频带边

緣的電平數值。

探討了能夠用來遙測輻射頻帶寬度的方法，和測量裝置所需的特性。

對通過試驗確定傳輸隨機信號序列占用頻帶寬度提供了一些實際的建議。

§ 14.1. 測量輻射頻帶寬度的方法

目前測量頻率低於 30 兆赫的輻射頻帶寬度，利用下述三種基本方法[文獻40]。

第一種方法在於利用具有規定頻率特性的窄帶濾波器來完全地分析傳輸頻譜；以手動或自動的方式變換頻率，並以濾波器中央頻率來確定每一頻譜分量的頻率。圖 14.1 所示一頻譜分析器簡圖，可作為應用第一種測量方法的例子。頻譜分析器是一個具有按音頻

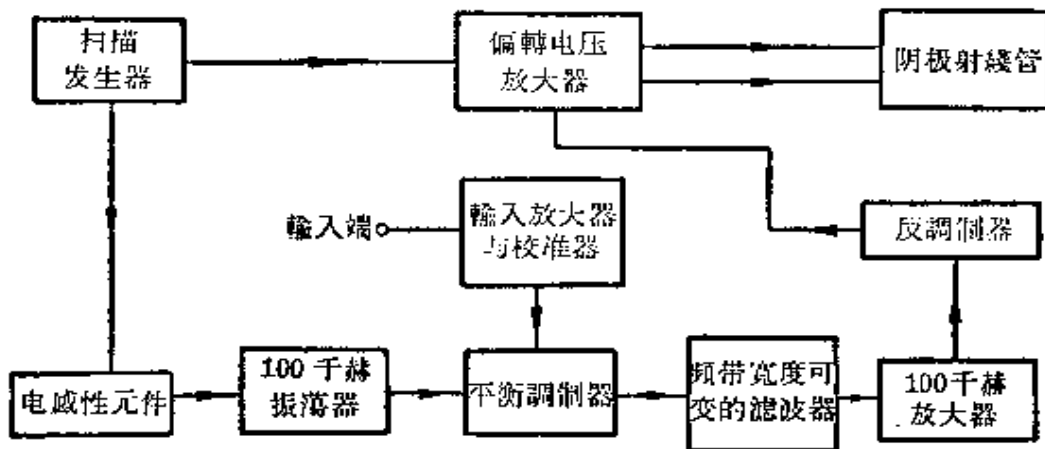


圖 14.1 第一種測量輻射頻帶寬度的方法。頻譜分析器簡圖

重復掃描的器件，對其中掃過的頻譜分量，按外差原理來測定其電平。頻率分量以垂直偏轉（尖頭脈沖）的形式出現在陰極射綫管屏上，並按頻率的次序分布在水平軸上。偏轉的高度即是脈沖所代表的頻率分量大小的量度。當採用具有長余輝的射綫管時，在屏上獲得連續綫形狀的頻譜。掃描發生器的輸出端與水平偏轉（X 軸）放大器以及電感性元件相聯，借電感性元件來變更本机振盪器的頻率。電感性元件有幾個繞組。其中一個繞組接入橋式綫路，此橋路的一

个臂里有扫描发生器管。将锯齿形电压通入这个绕组，可以改变频率范围。锯齿形电压的振幅用手来调定。电感性元件的第二个绕组由直流供电，直流电流的大小确定着铁心材料磁化曲线的工作点，从而保证本机振荡器频率的变化是线性的。

将频率变化的本机振荡器的输出和所研究的信号接至平衡调制器上，因此，在平衡调制器的输出端上出现 100 千赫差频(下边带)的信号。

为了将频谱的频率分量分开，在平衡调制器后面接有频带宽度可以变化的滤波器。当将频率为 100 千赫的信号放大至所要求的电平后，即进行整流，并以直流脉冲的形式接至垂直板 (Y 轴) 偏转电压放大器上。

为了进行定量分析，器件中装有内部校准器。该校准器由频率 1000 赫的正弦电压发生器与将正弦电压变为已知振幅的矩形脉冲序列的线路所组成。信号与间歇之比的选择，应使得奇次谐波的振幅大大地超过偶次谐波的振幅，这样就能够较容易地计算奇次谐波，以便确定信号频谱分量在频率标度上的位置。

第一种测量方法虽然能由试验来确定辐射频带的宽度，然而它有如下一些严重的缺点：(a) 设备十分复杂，且要求仔细地维护；(b) 频率变化的本机振荡器应高度稳定，以免频率标度偏移；(c) 测量线路所有环节中的电平，必须予以仔细地保持；(r) 一切形式的干扰大大地降低测量结果的准确性；(x) 较难选定恰当的、进行频谱分析的间隔时间。分析的时间定为 20—30 秒以上是不适宜的，因为在这个时间内，测量条件可能改变。而当间隔时间不大和分析滤波器的频带十分窄时，扫描速度影响读数结果，从而影响到测量的准确性；(e) 这种方法不能直接读出根据无线电通信规程要求所确定的辐射频带宽度；为了确定这个数值，必须知道信号的形状，以及计算包含有 99% 的辐射功率并与该信号形状相对应的频带边缘的电平。由于在实际条件下，较难确定信号形状与辐射频带边缘电平之间的精确关系式，所以这样会使测量结果的获得复杂化，并

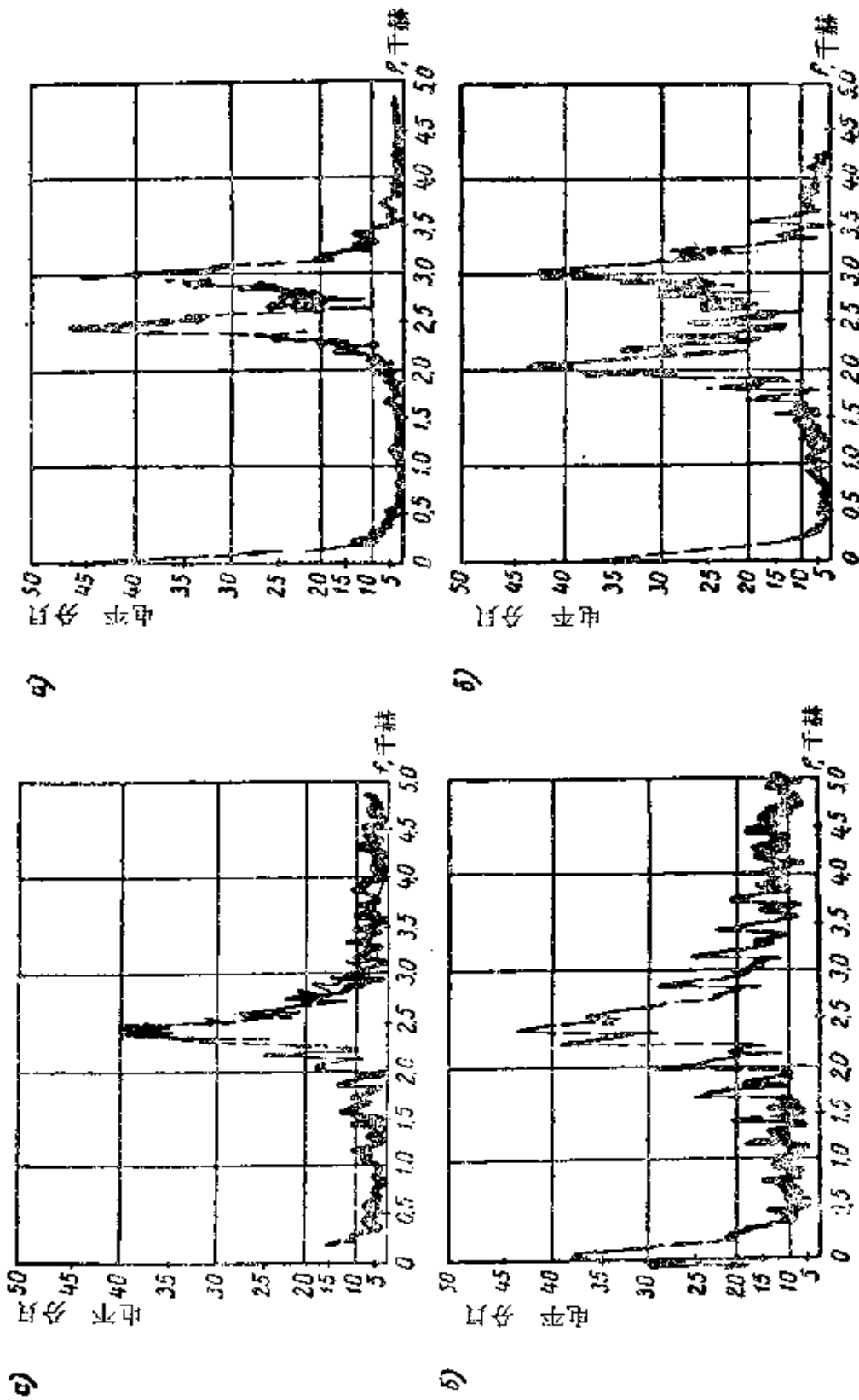


图 14.2 振幅键控(A1)。矩形点。工作速度: (a)141 波特, (b)282 波特

图 14.3 频率键控(F1)。矩形点。(a)频差 500 赫,工作速度 47 波特;(b)频差 1000 赫,工作速度 141 波特

且降低了測量結果的準確性。圖 14.2 與圖 14.3 上表示出根據第一種方法所得到的頻譜圖樣。

測量輻射頻帶寬度的第二種方法在於直接測量包含在遠離頻譜中央頻率的頻率分量中的那部分能量，以便確定帶外輻射的相對功率。

整流後的信號的頻率分量被高頻濾波器分開，高頻濾波器的截止頻率可以變更。圖 14.4 示有根據第二方法測量振幅-鍵控信號占用頻帶寬度的簡圖。發射機用點子調製。測量頻帶寬度的設備的輸入端接在等效天線上。輸入信號通過電壓調節器并由線性檢波器進行變換。如果將轉換開關置於“紅綫”位置，那末指示器就指示出經

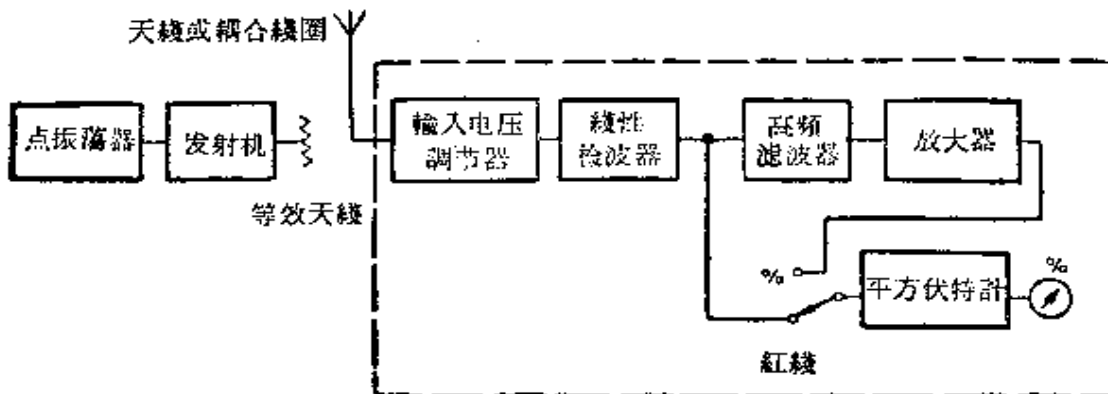


圖 14.4 第二種測量輻射頻帶寬度的方法。振幅調製信號頻帶寬度的測量設備簡圖

過檢波器的電流總功率。由選擇輸入電壓調節器以及發射機與測量設備間的耦合值來確定相應於“紅綫”的指示器的讀數，此後把輸入電平保持為常值。其次，將轉換開關置於“%”位置。此時，檢波器輸出功率的一部分（對應於比濾波器截止頻率高得多的頻率）經過濾波器和放大器而作用於測量儀表上。於是，在測量全部輻射功率的同時，也附帶測量了與在所確定頻帶界限之外的頻率相對應的功率。有線性刻度的測量儀表係以功率值刻度，即其刻度對應於給定頻帶以內頻率的功率值。測量儀表採用平均值指示器，使它能直接測量功率。

圖 14.5 上繪出用此方法測量頻率-鍵控信號占用頻帶寬度的簡

圖。信號通過屯平調節器後進行檢波，并由單獨的放大器進行放大。此後，如轉換開關位於紅綫位置，那末測量的是信號的總功率。此外則綫路的作用與振幅-鍵控信號綫路相同（見圖 14.4）。上述形式器件的缺點為必須根據所用的工作速度來更換濾波器。

在[文 29]中敘述了按第二種方法測量頻帶寬度的另外一種器

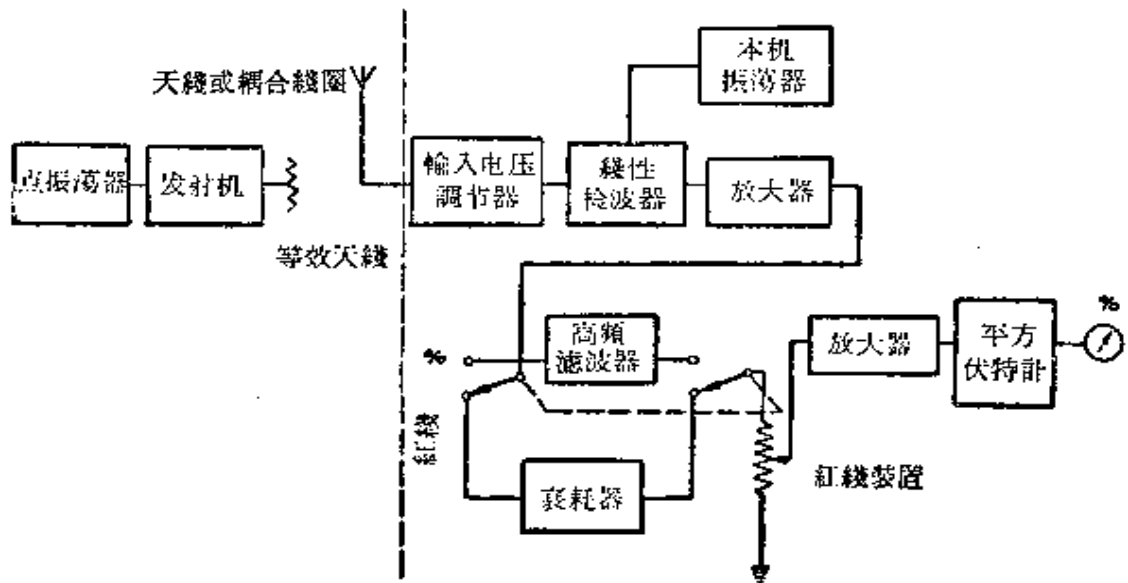


圖 14.5 第二種測量輻射頻帶寬度的方法。頻率調制信號頻帶寬度的測量設備簡圖

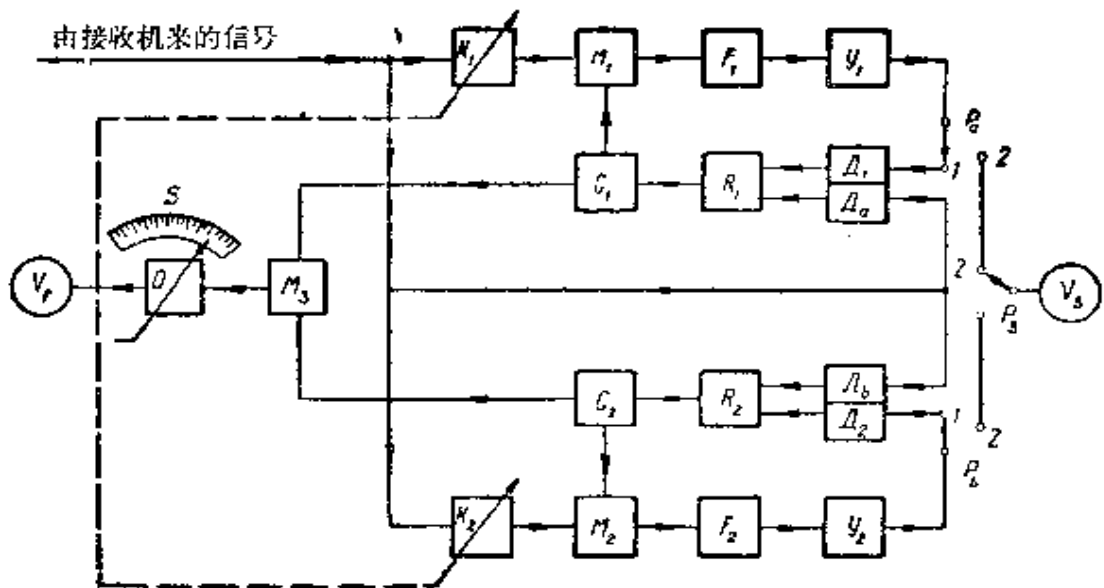


圖 14.6 第二種測量輻射頻帶寬度的方法。器件配綫方案

件，它的簡圖如圖 14.6 所示。信號同時加在變換器 M_1 、 M_2 和檢波器 D_a 、 D_b 上。當器件經過校準（下面將要談到）以後，把振蕩器 G_1 調定在 105 千赫頻率上，并把振蕩器 G_2 調定在 95 千赫頻率上。經過頻率的綫性變換以後，信號加在通頻帶為 5—15 千赫的兩個相同的帶通濾波器 F_1 與 F_2 上。

由於濾波的結果，在放大器 γ_1 上僅通入信號的下邊帶，而在放大器 γ_2 上僅通入信號的上邊帶。對在濾波器通頻帶中的信號，通路 $M_1—F_1—\gamma_1$ 與 $M_2—F_2—\gamma_2$ 具有 23 分貝左右的放大。由平方律檢波器 D_1 與 D_2 所得到的整流電壓，其作用方向與檢波器 D_a 與 D_b 的輸出電壓相反。用這些電壓來控制電抗管 R_1 與 R_2 ，并由 R_1 與 R_2 變更振蕩器 G_1 與 G_2 的頻率。如果由檢波器 D_1 (D_2) 來的電壓大於由檢波器 D_a (D_b) 來的電壓，那末，振蕩器 G_1 (G_2) 的頻率將以如下方式變化，即使得振蕩器的頻率與接收機的中間頻率（100 千赫）之間的差值減小。結果使遠離頻帶中心的頻譜分量衰減，而控制振蕩器頻率的電壓減低。

當兩個檢波器所耗的功率相同，亦即當信號的全部功率等於每一個位於頻帶有效寬度以外並放大 23 分貝的邊頻帶中那一部分功率時，振蕩器 G_1 與 G_2 的重調停止。於是， D_a 與 D_b 中的信號功率（每一種情況下為 100%）得與達到檢波器 D_1 與 D_2 的功率部分（每一種情況下為 0.5%）進行比較。

由振蕩器 G_1 與 G_2 產生並在變換器 M_2 上所得到的頻率的變化總和，與有效的頻帶寬度相對應。這總和可以直接從諧振回路 O 的標度 S 上讀出（用手將諧振回路 O 調定在伏特計 V_f 的最大讀數上）。與可變電容器電容變化相對應的頻帶寬度測量儀表的標度 S ，標定在 0 至 5250 赫。這樣的範圍足夠測量一般電報速度下輻射占用的頻帶寬度。

測量以下述方式進行。在器件接至接收機並接通電源電壓後，先憑聽覺將接收機調定在被測信號的頻率上，而後在接收機中建立通入器件的適當信號電平，這電平要使伏特計 V_f 的指針向右偏至

滿度。此时将轉換开关 P_a 与 P_b 置于位置 2 上。如从图 14.6 簡图所見到的那样，如果轉換开关 P_a 与 P_b 处于位置 2，那末信号不加在检波器 M_1 与 M_2 上，而是通往检波器 M_a 与 M_b 。于是电抗管改变振荡器 G_1 与 G_2 的頻率，以使这些振荡器頻率与接收机中間頻率之間的差值增加。振荡器 G_1 与 G_2 校准的結果，相当于調定在頻率 105 与 95 千赫上。当接收机准确地調諧在所研究的信号上时，在轉換开关 P_s 的两个位置上，伏特計 V_s 的讀数是相同的。

在接收机調諧和測量仪表校准以后，可以着手进行測量了。此时将轉換开关 P_a 与 P_b 置于位置 1，諧振回路 O 調諧在伏特計 V_f 的最大讀数上，并直接由标度 S 上讀出有效的頻帶宽度。

測量輻射頻带宽度的第三种方法为将占用的整个頻带按大約 100 赫划分为許多窄頻带，并且为每一窄頻带設有一个窄頻带带通滤波器；每一个滤波器的輸出端或者固定地联接在单独的測量器件上，或者自动輪流地与公共的測量器件联接起来。

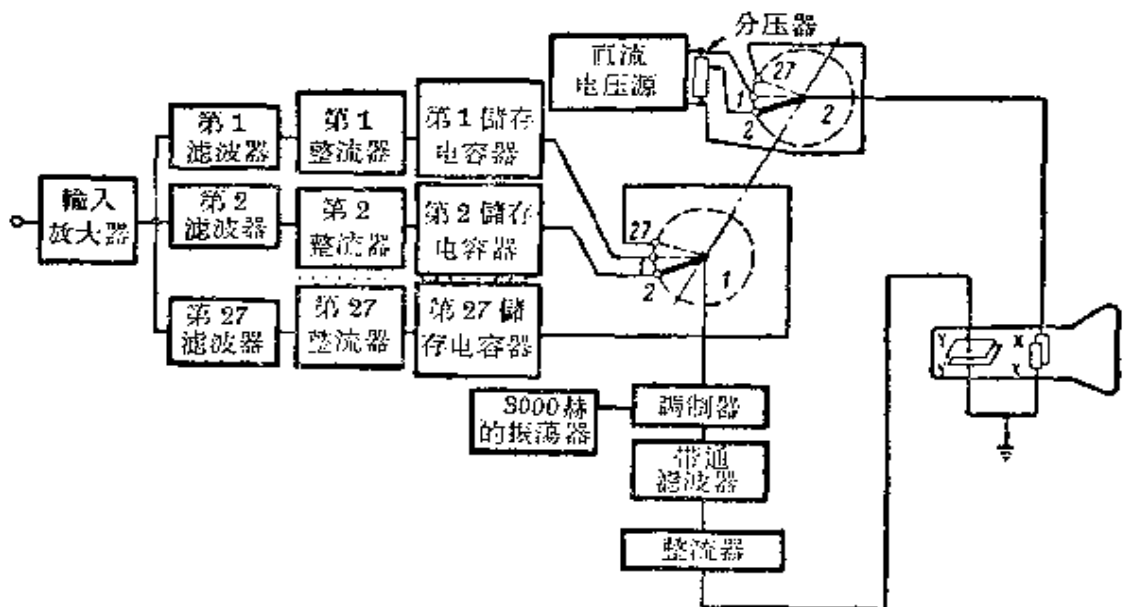


图 14.7 測量輻射頻带宽度的第三种方法。器件的簡图

器件的作用原理如图 14.7 所示。被研究的电压經過放大器加在并联联接的窄頻带带通滤波器（在該綫路图中共 27 个）上，窄頻带带通滤波器包括着由 40 赫至 16000 赫的頻带。滤波器的輸出

电压經過整流器而通至儲存电容器，且由轉換开关輪流地传送至調制器，这里輸出电压調制 3000 赫的振蕩器电压，于是，变换为交变电压。因此，在示波器屏上所得的頻譜为不同高度的綫条形状，頗便于观察。調諧在 3000 赫頻率的带通滤波器阻挡了干扰諧波。整流器用来使射到示波管屏上的射綫仅向上偏移，而不向下偏移。

机械上相互联接的轉換开关 P_1 与 P_2 由电动机驅动。轉換开关 P_2 从分压器上取得跃变形式的直流电压，从而水平偏轉板（X 軸）上的一定电压对应于在示波器上联接一定的滤波器。因此，对应于各个滤波器的音频电压，由分布在扫描軸上的一系列不同长度的垂直綫来表示。每条綫在一秒钟內大約重复 20 次。因此，眼睛看到的是不动的頻譜图样。这个方法主要适用于研究非周期信号（例如电话传输）。

按照国际上有关[文40]的建議，当測量頻帶寬度时，需有如下的准确度。

A1 类周期信号(振幅鍵控电报)。在第一种測量方法下，利用試驗室設備与带自动扫描的設備。試驗室設備可以在被試信号具有稳定的振幅和稳定的頻率下使用。振幅用已校准的衰耗器进行測量，从固定电平起讀数；頻率用頻率計来測量。当振幅与頻率足够稳定时，測量准确度仅与衰耗器和頻率計的准确度有关。在測量振幅时，可以使誤差不超过 $\pm 1\%$ ，然而实际上可以容許有 $\pm 5\%$ 的誤差。

当采用带自动扫描的設備时，如果頻率扫描速度十分小，那么可以充分利用滤波器的高度选择性。因此，接近于載波頻率分量的振幅，可以用 ± 2 分貝的准确度来进行測量；而离开較远的分量的振幅（特别是在窄頻带带通滤波器和較小传输速度下），則具有較低的准确度。

頻率偏移的測量准确度与扫描的綫性性质和所研究的頻帶的寬度有关。然而在周期信号的情形下，如果已知传输速度的大小，則分量間按頻率計算的距离也就成为已知的了。

第二种测量方法所采用的设备的准确度与功率比的测量准确度和高频滤波器衰减曲线的倾斜度有关。功率比的测量误差约为 $\pm 0.1\%$ 。滤波器所产生的误差与所用的滤波器类型有关。

如果分量的频率近似地相应于滤波器的平均频率，则第三种测量方法所用的设备，可以保证误差在 $\pm 1\%$ 左右。

F 1 类周期信号(频率键控电报)。当测量 F 1 型信号频谱时，可以达到和测量 A 1 型信号频谱相同的准确度。根据国际上有关的建议，分析工作中波与短波范围内的发射机的频谱所用的、且按第一种方法工作的设备，应当具有下列特性。

滤波器的频带宽度主要是根据所研究信号的特性来确定。它比被测频谱的宽度应当小一些；最好在静态下，滤波器的频带宽度不超过 25 赫。滤波器衰减的频率特性在衰减前应当具有 60 分贝左右的斜度。

扫描应当足够慢，以使滤波器的反应曲线尽可能接近于静态特性。扫描的容许速度主要是根据分析用的滤波器的频带宽度来确定(对频带宽度为 10 赫的滤波器，容许的扫描速度一般低于每秒 100 赫)。

被测频率范围应当包含需要测量的、足够远的频谱分量。最大扫描至 30 千赫即已足够。分析窄频带传输时，扫描应当减低至 1 千赫。

设备应当能测量振幅至少相差 60 分贝的一些频谱分量。可以用已校准的衰减器或已校准的示波器刻度，来分别测量较大和较小的频谱分量。

包含在器件线路中的振荡发生器的频率的稳定性，应当使在测量时间内的频率总偏离和滤波器的有效分辨能力相比较要小一些。

§ 14.2. 确定测量无线电报辐射占用频带宽度的电平

为了确定按第一种方法进行测量时辐射频带宽度的有效数值，就必须知道包含有 99% 的辐射功率的频带的边缘处的电平数值。下

面来计算一下当振幅键控和频率键控时，此种电平数值。

对用矩形信号进行振幅键控的情形，我们已从公式(6.12)得到频带边缘处的频谱分量值为 $n=21$ 。因此，辐射所占用频带边缘处的电平为

$$N_{\text{分贝}} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{\pi^2 n_1^2} \right) \\ = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{\pi^2 21^2} \right) = -36.4 \text{ 分贝。} \quad (14.1)$$

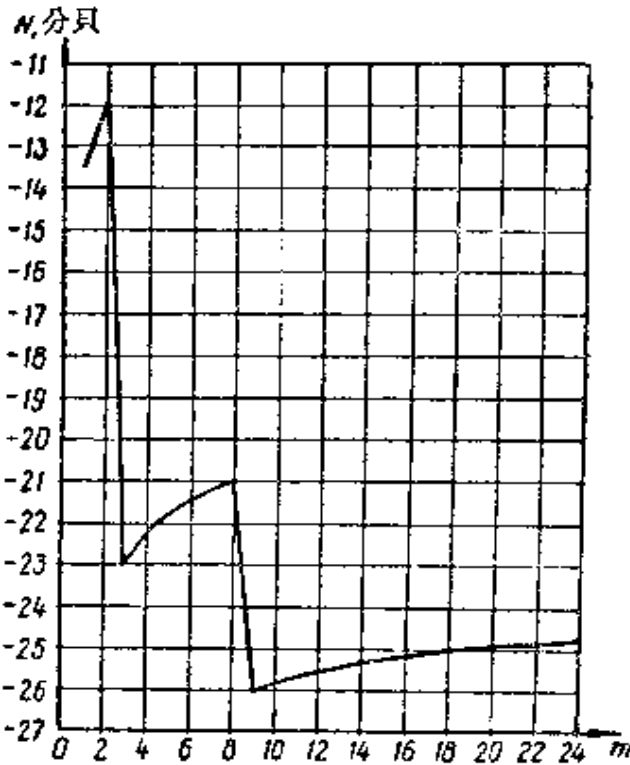


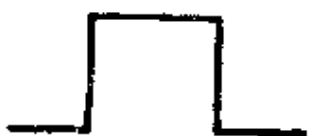
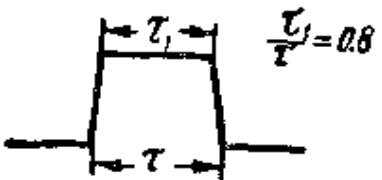
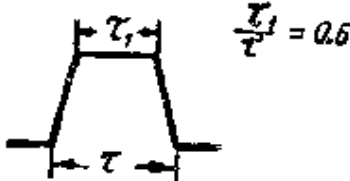
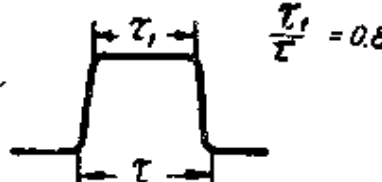
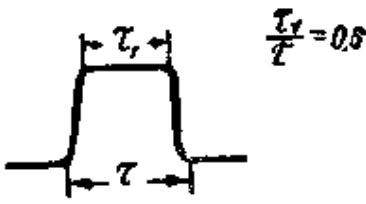
图 14.8 传输周期性矩形频率-调制信号时，包含 99% 的辐射功率的频带边缘处的电平

如果信号的形状不是矩形，那末可以用类似的方法来确定规定辐射占用频带宽度的电平。在表 14.1 中列有对各种不同形状的信号，通过计算和试验所得出的电平数值。

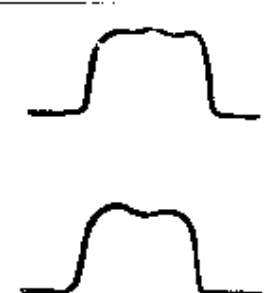

对于频率键控下的矩形信号而言， n_1 次频谱分量可以由等式 (6.30) 确定。图 14.8 上表示出用这种方式计算的图形。该图表示在传输矩形频率-键控信号下，包含 99% 辐射功率的频带的边缘电平

N 随键控指数而变化的曲线。在图中 N (分贝) $= 10 \lg n_1^2$ ，式中 n_1 ——包含 99% 的辐射功率的频带边缘分量； D ——偏差； B ——键控速度的波特数； $m = \frac{2D}{B}$ ——调制指数。电平是相对于未调制载波进行计算的。 n_1 由下式确定：

包含 99% 辐射功率的频带边缘处的电平(振幅键控) 表 14.1

编号	信号形状	低于未键控载波的电平, 它对应于辐射所占用的频带宽度 (分贝)	附注
1	<p style="text-align: center;">矩形</p> 	-36.4	
2	<p style="text-align: center;">梯形</p> 	-30.8	计算值
3		-25.0	
4	<p style="text-align: center;">余弦-平方律圆化形</p> 	-29.7	
5		-21.3	

續表 14.1

編号	信 号 形 状	低于未滤波载波的电平, 它相应于幅射所占用的频带宽度 (分贝)	附 注
6		-34 至 -30	試 驗 值
7		-30 至 -25	

$$\frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{m^3} \sin^2 \frac{m\pi}{2} + 2m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(n+m)\frac{\pi}{2}}{n^2-m^2} \right]^2 \right\} \geq \frac{0.99}{2}$$

图 14.8 上的图形和表 14.1 中的数据, 均可在测量时用来计算电平。

§ 14.3. 遙测无线电发射机辐射的频带宽度

在直接靠近发射机处测量辐射频带宽度的结果, 往往与离它很远处所测量的结果相差甚大。其原因在于遙测时发生一些困难, 由于这些困难, 使此种测量的准确性大大降低。

同时应当指出, 在控制室中进行遙测可以集中地控制许多组发射机, 所以在许多情形下希望使用这种方法。为此, 下面将讨论遙测条件的一些特点, 为此目的而采用的方法, 以及测量设备所希望有的特性。

由控制室进行频带宽度的遙测, 与靠近发射机测量有许多差别:

(1) 可能經常在有其他电台和杂音的干扰下来对辐射进行观

测，由于深度的和频繁的衰落（其中也包括选择性衰落）而被畸变。

(2) 控制室应当在其所控制的全部频率范围内，对大量具有不同辐射形式的许多用途的各种发射机进行观测。这就要求设备具有比只观测一台发射机时有更大一些的灵活性和运转能力。

(3) 观测者不能控制工作开始的时间、工作的持续时间或辐射的形式；它限于测量为它所接收且在当时进行传输的信号。因此，测量应当迅速，在有疑惑或犹豫的情况下，测试员常常失掉了再次测量的可能性。

与在远离发射机处进行测量所有的这些困难相反，控制室经常能够满意地分析被辐射的频谱和测量辐射频带的宽度。在相当大的程度上，这是由于从控制室所进行测量的最终目的，通常与靠近发射机进行的测量是有区别的。由控制室中所进行的测量，首先是用来进行监督和检查；它的目的在于确定被辐射的频谱和规定的标准是否一致，如果不一致，那末实际超出规定频带外的频谱振幅和长度又是怎样的。靠近发射机处所进行的频谱分析，通常有着更为广泛的目的。

现在来讨论一下限制控制室中测量准确性的主要原因。

所得到的准确性为发射机频率的稳定性和频谱分析器中测量频率的准确度所限制。

当分析频谱时，精确地确定各个频谱分量相对于具有最大电平的分量的相对电平是很重要的。因此，测量这些电平的准确性，对测量频带宽度的准确性有很大的影响。

干扰决定着一个限度，低于这个限度，就不可能进行测量，或者所得到的结果就不足置信。因此，这种限度规定了控制室可能满意地观测的发射机数目。由于干扰所引起的特性和测量误差的大小，与所采用的测量方法和信号电平与干扰电平之间的关系有关。这种关系每日每季可能都有所变更，且与信号观测期内所存在的衰落深度有关。

选择性衰落也可能影响测量被测观测频谱振幅的准确性的限度。由于可以假定经历较长的时期后，在所有被辐射的频谱的频率上，衰落值将是相同的；故如果在一段较长的时期内进行测量时，由于选择性衰落所引起误差的主要部分可能平均化。频谱宽度增加时，困难也增加。然而，较宽的频谱大部分是在超过 50 兆赫的频段辐射，在这个频段内选择性衰落不是一个确定的因素。但当频率高于 50 兆赫时，位于广阔的被测频带中的频率，在传播上可能有差异。

如果来讨论一下作为限制因素的、分析器本身的准确性，那末，为了确定该器件所固有的误差，应当观测具有已知频谱的信号。实际上采用能在 10% 以内区别被测信号振幅的分析器，信号频谱的各个分量以不低于滤波器所具有的分辨能力的间隔而分布着。

在控制室中处理的辐射频谱，可以根据所利用的辐射和载波频率而在数赫至 6 兆赫的宽度内变化。如果观测限于频率低于 50 兆赫左右的无线电频谱的波道，那末可以认为，遇到的大多数信号将具有约低于 25 千赫的频带宽度。如果控制室测量更高频率的频带的宽度，那末辐射频带的宽度可以达到 6 兆赫或更高一些。

前面所述的三种测量频带宽度的方法也适用于在控制室中（亦即在远离发射机处）进行测量。这些方法中的任何一个，都不能认为在任何情况下用在控制室是最适宜的。

第一种方法的优点在于，它能在广阔的频率范围内很容易和很迅速地进行测量。根据这个方法可以很容易地构造出测量频率范围可变、手动与自动扫描以及分析器分辨能力可变的器件。它也可以获得满意的振幅范围，并使干扰作用最小。利用阴极射线管可以保证迅速而清晰地显示。然而，为了显示随机的和不重复的频谱分量而需要的较大扫描速度，是以减低分辨能力为代价而换来的。但是这些参数实际上可以折中，从而可构造出良好的器件。

第二种方法的优点在于，它能直接测量包含 99% 的辐射功率的频带宽度，测量器件比较简单便宜。然而，此方法在对干扰的敏感

程度和在不同工作模式下測量不同寬度頻譜的可能性方面不如其他方法好。尤其是在衰落下進行測量的準確性大大降低。因此，第二種方法在控制室中只是有限度地採用。

分析頻譜的**第三種方法**要求將所研究的信號接到大量的濾波器中，這樣一方面使設備複雜、昂貴，另一方面，為了達到適當準確性所必需的容限的選定受到了限制。變更測量頻率範圍和變更分辨能力可能受到很大的限制，且只能通過將本來就複雜的設備更加複雜化的途徑，才能達到上述目的。但是，既然同時用許多濾波器進行分析，故分析進行得較快，而且分析結果不因過渡過程而畸變，因此，不重複的頻譜分量的顯示就容易了。

從上述討論中可以得出結論，適宜於用在控制室中的測量設備，至少應當具有下列的一些特性。

1. 動作容易且迅速。因為應當對工作於不同時間和不同頻段的發射機進行監督，並且要在不同的干擾電平下觀測信號，故從觀測一個信號過渡到觀測另一個信號所耗費的時間與測量本身所需的时间均應當最少。應當指出，這個要求並不總是容易保持的。一方面，希望頻譜顯示與信號接收同時進行；另一方面，為了成功地選擇最有利的時間，以便根據傳播的條件和其他台的干擾進行試驗，以及為了有充分的時間來獲得時間函數形式的頻譜並精確地測量頻帶的寬度，信號的記錄與頻帶寬度的測量在時間上應當隔開。此時，可以由測試員在控制室中記錄信號，而在實驗室中則集中地測量頻帶寬度。

2. 寬的頻帶範圍。顯然，器件所包括的頻率範圍愈寬，則所要求的測量設備也愈少。頻率範圍的寬度應當具有足夠高的品質的接收機來確定。經驗表明，這種接收機可能超出相當寬的頻率範圍，以至於達到 50 兆赫。

3. 最小的測量頻率範圍。這個範圍與分析器前設置的頻帶寬度有關。如同前面所指出的那樣，當監督大量的輻射和業務時，頻帶寬度之間有很大的差別。為了在每次測量時保持有最大的分辨能

力，希望被测频率范围不大于把所期望的频率部分分布在频率标度上所必需的范围。这个观点确定了被测频率范围的最小数值（1千赫）。

在频率约低于30兆赫的区域中，观测的频谱宽度不超过25千赫。如果同时还研究带外辐射分量，那末希望扫描值超过频带宽度值3—4倍；于是，扫描的最大值将为100千赫。

当测量超过30兆赫以上的频率时，可能遇到占有极宽频带的信号。这种辐射的频谱可能需要用到超过6兆赫的最大扫描值。为了仔细地观测这种宽的辐射频谱的各个部分，希望扫描最小值为10千赫左右。

4. 可变更的扫描速度。为了最充分地利用分析器，扫描速度应当能变更。最大扫描速度受所必需的最大扫描数值与分析器的分辨能力的限制。可以使用在60秒中1次扫描与1秒钟10次扫描内变化的速度。

如果利用阴极射线管作指示器，那末射线管屏的余辉在确定最小扫描速度时将起着重大的作用。

最佳扫描速度是由辐射频谱特性与分析器特性间折衷决定的。小的扫描速度能仔细地研究该频谱，但却增大了不能发现过渡过程与非重复现象的概率。大的扫描速度减低了振幅观测的准确性和器件的分辨能力。最好的分析器应能将可变的扫描速度（在前面所确定的最大与最小限度内）与满意的分辨能力和准确性结合起来。

5. 停止自动扫描的装置。为了能用手控制来研究频谱的个别部分，必须设置停止自动扫描的装置。

6. 可变更的分辨能力。所谓分辨能力，可理解为分析器区分或识别两个邻近的信号或相邻的频谱分量的能力；因为在控制室工作过程中对分析器所提出的要求有变化，故器件的分辨能力应当能加以调节。因此，可以选择最佳的扫描速度，并足够精确地复现振幅。分辨能力在电平—60分贝时约为50赫，可以认为它适合于频率低于30兆赫的分析器。

7. 适当的振幅范围。振幅范围应使接收设备与分析器中不致引入非线性（这种非线性可能使虚假的频谱分量出现，或者使实有的频谱分量的相对振幅发生畸变）。实际上可以使动态范围达60分贝左右而不会产生甚么特别困难。

8. 对于干扰的相对不敏感性。如同上面曾经指出的一样，干扰给远离发射机处进行辐射频谱测量造成很大的困难。干扰可分为两大类：(a)由工作在同一波道或邻近波道中的发射机所产生的干扰；(b)大气干扰与工业干扰。为了获得满意的测量结果，应当消除或补偿此两类干扰。

减低和消除由其他发射机所产生干扰的措施，通常认为应在分析器以外来进行，例如采用定向接收天线就是这方面的措施。然而，如果有用信号与干扰信号的频谱在频率标度上分布得很近，那末分析器应能将两者区分开来。

分析器应当按下列方式来设计，即使得加在它的输入的干扰，不会产生频谱分量强度的虚假显示。例如由于分析器内部有用信号与干扰信号间的交扰调制，就可能发生这种虚假的显示。

9. 适当的指示器件。当进行遥测时，需要有迅速的显示。最合适的显示器件为具有余辉的阴极射线管。可以在射线管屏上拍摄到频谱。

最后应当着重指出，由于控制室是在衰落条件下和存在其他台和杂音的干扰下来进行频谱测量的。故迅速地和随机应变地测量是特别重要的。如果信号电平足够遮盖干扰电平，那末利用现有的一些测量方法和测量器件，就可以获得和靠近发射机测量所得到的相当的测量准确度。

§ 14.4. 对试验确定随机信号序列传输占用频带宽度的实用建议

当用频谱分析器来研究传输随机信号序列所形成的频谱时，通常指示器件的读数随时在波动着。因此，在确定传输所占用的频带

寬度時，發生了應當按哪個讀數來考慮的問題。

顯然，如果傳輸形狀相同、但持續時間不同的信號（亦即信號增長和減低的規律相同，具有同樣的最大振幅，只是其持續時間有所區別），那末較短的信號將對應于較寬的頻帶。因此，如果我們對傳輸所利用的電碼的基本信號所占用的頻帶寬度感興趣的話，那末應當考慮顯示器件的最大讀數。然而，仍需要闡明，在甚么條件下，這些讀數達到和周期信號序列相同的數值。研究表明（此處不進行這種研究），如果存在相同的信號序列時，為了以較高準確性達到與傳輸周期信號相當的穩定狀態，必須有時間：

$$T_F = \frac{2}{F};$$

式中

F ——以赫為單位的頻譜分析器的濾波器的頻帶寬度。

例如，如果頻譜分析器的濾波器的頻帶寬度為 $F=10$ 赫，傳輸速度 $B=20$ 波特，那末，為了確定指示器件的讀數，應當具有的信號序列數為

$$n = T_F \cdot B = \frac{2B}{F} = \frac{2 \times 20}{10} = 4 \text{ 個信號。}$$

於是，如果在傳輸電文中遇有十分長的基本信號序列（在上述例子中不少於 4 個），那末在傳輸這些信號時，將有與所利用電碼的信號單元的頻譜相對應的最大指示器件讀數。

如果傳輸的電文中不包含十分長的相同信號序列，那末所得到的頻帶寬度將小於前面所確定的頻帶寬度。信號的其他組合將不足以尋求出與周期信號頻譜相對應的極限值。

顯然，例如利用莫爾斯電碼時，大多數一般電文中（除了數字）包含着少量具有為了達到極限曲綫而有的必需長度的序列。因此，觀測時間應當足夠長，而分析器的濾波器的頻帶應儘可能寬一些。

附录

附录 I

各类辐射必需的频带宽度

表中采用下列符号：

B_n ——必需的频带宽度，赫；

B ——发报速度，波特；

N ——传送传真和电视时，一秒内最大可能传输的黑、白单元数目；

M ——最大调制频率，赫；

C ——副载波频率，赫；

D ——瞬时频率的最大值与最小值间差值的一半。瞬时频率就是相位的变化速度；

t ——脉冲持续时间，秒；

k ——辐射时起变化的总数值系数，它与信号的容许畸变有关。

表 II.1.1

说明与辐射类型	必需的频带宽度，赫	示例与解释
I. 调 幅		
等幅电报(A 1)	对遭受衰落的线路 $B_n = BK$, $K=5$; 对没有衰落的线路 $K=3$	莫尔斯电码, 每分钟 25 字, $B=20$, $K=5$, $B_n=100$ 赫。 对 42.5 波特的 7 位电码的四波道式短时多路系统, 波道中 $B=170$, $K=5$, 频带宽度 850 赫
变频电报(A 2)	对遭受衰落的线路 $B_n = BK + 2M$, $K=5$; 对没有衰落的线路 $K=3$	莫尔斯电码, 每分钟 25 字, $B=20$, $M=1000$, $K=5$, $B_n=2100$ 赫

(續表)

說明与辐射类型	必需的频带宽度, 赫	示 例 与 解 释
电话(A 3)	$B_n = M$ (单边带传输) $B_n = 2M$ (双边带传输)	对降低了载波的单边带电话 $M=3000, B_n=3000$ 赫, 对双边带电话: $M=3000$ 赫, $B_n=6000$ 赫。对双独立边带 $M=3000, B_n=6000$ 赫
无线电广播(A 3)	$B_n = 2M$, 根据所要求的品质 $M=4000 \sim 10000$	语言和音乐, $M=4000, B_n=8000$ 赫
传真, 载频用音频调制与键控(A 4)	$B_n = KN + 2M, K=1.5$	N 等于滚筒圆周乘以单位长度中的线数, 再乘以每秒轉数計的滚筒的旋轉速度。滚筒直径—70 毫米, 每毫米的线数—5 条, 滚筒的旋轉速度—每秒 1 轉, $N=1100, M=1900, B_n=5450$ 赫
电视(传象与伴音)(A 5 与 F 3)	根据所采用的电视系統而变化	线条数—625, 每秒线条数—15625, 视频信号的 B_n —5 兆赫。图象信号总频带宽度—6.25兆赫。包括保护频带在内的伴音調頻驅射频带宽度—0.75兆赫, 总频带宽度—7兆赫
II. 調 頻		
移频电报(F 1)	$B_n = 2.6D + 0.55B$ (对 $1.5 < \frac{2D}{B} < 5.5$); $B_n = 2.1D + 1.9B$ (对 $5.5 \leq \frac{2D}{B} \leq 20$)	7 位电碼四波道式临时多路系統, 波道用 42.5 波特; $B=170, D=200, \frac{2D}{B}=2.35$, 因此 $B_n = 2.6D + 0.55B = 613$ 赫
調頻电话(F 3)	$B_n = 2M + 2DK$ 。正常时 $K=1$, 但有时候需要比較大的 K 值	对平均的調頻电话状况, $D=15000, M=3000, B_n=36000$ 赫
无线电广播(F 3)	$B_n = 2M + 2DK$	当 $K=1, B_n=180000$ 赫时, $D=75000, M=15000$
传真(F 4)	$B_n = KN + 2M + 2, K=1.5$	(參閱传真, 調幅)。滚筒直径—70 毫米, 每毫米的线数—5 条, 旋轉速度—每秒 1 轉, $N=1100, M=1900, D=10000, B_n=25450$ 赫

(續表)

說明与幅射类型	必需的頻带宽度, 赫	示 例 与 解 释
双頻率电报(双HT) (F 6)	如果波道不同步, 則 $B_n = 2.6D + 2.75B$, 并且 B 表示具有最大速度的波道速度。如果波道同步, 則頻带宽度与 $F1$ 相同, 且 B 表示兩条波道中任何一条的速度	頻率間差值为 300 赫的双頻率电报系統, 波道未同步, 当每波道中以 170 波特进行鍵控时, $D = 600$, $B = 170$, $B_n = 2027$ 赫
III. 脉冲調制		
未調制的脉冲(P 0)	$B_n = 2 \frac{K}{t}$, K 与脉冲的长度对脉冲增长时间的比值有关; $1 < K < 10$	当 $t = 3 \cdot 10^{-6}$, $K = 6$; $B_n = 4 \cdot 10^6$ 赫
已調制的脉冲(P2 或 P3)	B_n 与所采用的調制型式有关, 它們中的許多种类还正在进行研究	

附录 II

将积分方程化为微分方程的边值問題

我們來說明, 积分方程 (2.37)

$$U(\lambda) = \mu' \int_{-1}^{-1} \frac{\sin k(\lambda - \nu)}{\pi(\lambda - \nu)} U(\nu) d\nu \quad (\text{II. II. 1})$$

如何化为刘微尔型微分方程的边值問題。現在来研究下列齐次綫性微分方程

$$D_\lambda U(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda^2 - 1) \frac{dU(\lambda)}{d\lambda} \right] + (k\lambda)^2 U(\lambda) = CU(\lambda), \quad (\text{II. II. 2})$$

式中

C ——实常数, 通常称为分隔常数。

方程(II. II. 2)——刘微尔自共軛型方程, 仅对于分隔常数 C 中某些离散的 C_l 值, 才在区間 $-1 \leq \lambda \leq +1$ 中具有有界且异于零的二次可微解 $u(\lambda)$ 。对应的解 $u_l(\lambda)$ 今后将被称为微分方程

(II. II. 2)的有界解。

显然[文献 36, § 6.3], 离散的 C_2 可以从最小的 C_0 值开始列成递增的序列, 而与号数为 n 的分隔常数相对应的有界解 $u_n(\lambda)$, 在最常遇到的情况下, 在区间 $-1 < \lambda < +1$ 中具有 n 个零点。

假设 $u_n(\lambda)$ 是微分方程(II. II. 2)的特解, 那末该微分方程的通积分将为

$$U_n(\lambda) = \left[a + b \int_0^\lambda \frac{d\mu}{(\mu^2 - 1) [u_n(\mu)]^2} \right], \quad (\text{II. II. 3})$$

式中

a 与 b ——任意常数。

由公式(II. II. 3)可以看出, 微分方程(II. II. 2)对应于分隔常数 C 的同一值 C_n 的所有有界解彼此成比例, 而这个方程的无界解在 ± 1 点有两个对数奇点。

另一方面, 方程(II. II. 2)对应于分隔常数 C 的两个不同值 C_m 和 C_n 的两个不同有界解互相正交, 这是因为

$$\begin{aligned} & (C_m - C_n) \int_{-1}^{+1} u_m(\lambda) u_n(\lambda) d\lambda = \\ & = \int_{-1}^{+1} \left\{ u_m(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \left[(1 - \lambda^2) \frac{du_n(\lambda)}{d\lambda} \right] - u_n(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \left[(1 - \lambda^2) \frac{du_m(\lambda)}{d\lambda} \right] \right\} d\lambda = 0. \end{aligned} \quad (\text{II. II. 4})$$

上式容易用两次分部积分来验证。

最后, 可以证明(文献 36, § 6.3), 经过归一化 $\left\{ \int_{-1}^{+1} [u_l(\lambda)]^2 d\lambda = 1 \right\}$ 的微分方程(II. II. 2), 其所有有界解序列 $u_l(\lambda)$, 构成完备的法正交系。这意味着任何一个在闭区间 $-1 \leq \lambda \leq +1$ 上二次可微且有界的函数 $U(\lambda)$, 可以在这个区间上表示为绝对且均匀收敛的级数形式

$$U(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l u_l(\lambda), \quad (\text{II. II. 5})$$

式中

$$a_1 = \int_{-1}^{+1} U(\lambda) u_2(\lambda) d\lambda.$$

现在来证明, 积分方程 (II. II. 1) 的每一个解, 即为微分方程 (II. II. 2) 的解。为此, 首先来证明一个辅助等式

$$D_\lambda \int_{-1}^{-1} \frac{\sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)} U(\nu) d\nu = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)} [D_\nu U(\nu)] d\nu, \quad (\text{II. II. 6})$$

式中

$$D_\nu U(\nu) \equiv \frac{d}{d\nu} \left[(\nu^2 - 1) \frac{dU(\nu)}{d\nu} \right] + (k\nu)^2 U(\nu).$$

$U(\nu)$ ——任意一个在区间 $-1 \leq \nu \leq +1$ 上二次可微且有界的函数。

事实上

$$D_\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)} U(\nu) d\nu = \int_{-1}^{+1} \left[D_\nu \frac{\sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)} \right] U(\nu) d\nu. \quad (\text{II. II. 7})$$

存在着等式

$$D_\lambda \frac{\sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)} = D_\nu \frac{\sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)}. \quad (\text{II. II. 8})$$

这是因为

$$\begin{aligned} D_\lambda \frac{\sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)} &= \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda^2 - 1) \frac{d}{d\lambda} \frac{\sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)} \right] + \\ &+ (k\lambda)^2 \frac{\sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)} = -\frac{2k\lambda\nu}{\pi(\lambda-\nu)^3} \cos k(\lambda-\nu) + \\ &+ \frac{2\lambda\nu \sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)^3} + \frac{2k \cos k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)^2} - \\ &- \frac{2 \sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)^3} + \frac{k^2 \sin k(\lambda-\nu)}{\pi(\lambda-\nu)}. \end{aligned} \quad (\text{II. II. 9})$$

可见上式对 λ 与 ν 是对称的, 因此, 等式 (II. II. 8) 得证。于是, 等式 (II. II. 7) 可以写成下列形式,

$$\begin{aligned}
 D_\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} U(v) dv &= \int_{-1}^{+1} \left[D_\lambda \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} \right] U(v) dv \\
 &= \int_{-1}^{+1} \left[D_v \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} \right] U(v) dv. \quad (\text{II. II. 10})
 \end{aligned}$$

假定 $G(v)$ 与 $F(v)$ 为区间 $-1 \leq v \leq +1$ 上的任意二次可微且有界的函数。那末，可以写出等式

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dv} \left[(v^2-1) \frac{dF(v)}{dv} \right] G(v) dv \\
 &= \int_{-1}^{+1} F(v) \frac{d}{dv} \left[(v^2-1) \frac{dG(v)}{dv} \right] dv, \quad (\text{II. II. 11})
 \end{aligned}$$

上式可由左右两边进行分部积分而得到验证。

利用等式 (II. II. 10) 与 (II. II. 11)，将等式 (II. II. 6) 的左边写出并加以变换

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^{+1} \left[D_v \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} \right] U(v) dv = \\
 &= \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{d}{dv} \left[(v^2-1) \frac{d}{dv} \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} \right] + (kv)^2 \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} \right\} U(v) dv = \\
 &= \int_{-1}^{+1} \frac{d}{dv} \left[(v^2-1) \frac{d}{dv} \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} \right] U(v) dv + \\
 &\quad + \int_{-1}^{+1} (kv)^2 \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} U(v) dv = \\
 &= \int_{-1}^{+1} \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} \frac{d}{d\lambda} \left[(v^2-1) \frac{dU(v)}{dv} \right] dv + \\
 &\quad + \int_{-1}^{+1} (kv)^2 \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} U(v) dv = \\
 &= \int_{-1}^{+1} \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} \left\{ \frac{d}{dv} \left[(v^2-1) \frac{dU(v)}{dv} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + (kv)^2 U(v) \right\} dv = \\
 &= \int_{-1}^{+1} \frac{\sin k(\lambda-v)}{\pi(\lambda-v)} \left[D_v U(v) \right] dv,
 \end{aligned}$$

亦即变换的结果，我们从 (II. II. 6) 式的左边部分推出了它的右

边部分，从而该式得证。

现在我们来证明，积分方程 (II. II. 1) 的每一个解，即为微分方程 (II. II. 2) 的解。假定 $\psi_m(\lambda)$ —— 积分方程 (II. II. 1) 对应于特征值 μ'_m 的特征函数，亦即

$$\psi_m(\lambda) = \mu'_m \int_{-1}^{+1} \frac{\sin k(\lambda - \nu)}{\pi(\lambda - \nu)} \psi_m(\nu) d\nu. \quad (\text{II. II. 12})$$

既然积分方程 (II. II. 1) 的核满足在区间 $-1 \leq \lambda \leq +1$ 上二次可微和有界的条件，故函数 $\psi_m(\lambda)$ 亦在区间 $-1 \leq \lambda \leq +1$ 上二次可微并有界。因此，该函数满足关系式 (II. II. 6)，亦即

$$\begin{aligned} D_\lambda \psi_m(\lambda) &= D_\lambda \mu'_m \int_{-1}^{+1} \frac{\sin k(\lambda - \nu)}{\pi(\lambda - \nu)} \psi_m(\nu) d\nu \\ &= \mu'_m \int_{-1}^{+1} \frac{\sin k(\lambda - \nu)}{\pi(\lambda - \nu)} [D_\lambda \psi_m(\nu)] d\nu. \end{aligned} \quad (\text{II. II. 13})$$

由 (II. II. 13) 可直接看出， $D_\lambda \psi_m(\lambda)$ 为积分方程 (II. II. 1) 的特征函数。于是， $D_\lambda \psi_m(\lambda)$ 与 $\psi_m(\lambda)$ 成比例，亦即

$$D_\lambda \psi_m(\lambda) = C_m \psi_m(\lambda),$$

式中 C_m —— 与 m 有关的比例系数。

上面这个等式表明， $\psi_m(\lambda)$ 为微分方程 (II. II. 2) 的解。

于是我们证明了，核 $\frac{\sin k(\lambda - \nu)}{\pi(\lambda - \nu)}$ 的每个特征函数，是微分方程 (II. II. 2) 相应于分隔常数 C 中某个 C_m 值的有界解。

附录 III

确定系数 d_n

勒让德多项式 $P_n(\lambda)$ 由等式

$$P_n(\lambda) \equiv \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\lambda^2 - 1)^n}{d\lambda^n} \quad (\text{III. 1})$$

决定，且它满足正交关系式

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\lambda) P_n(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{当 } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{当 } m = n \end{cases} \quad (\text{II. III. 2})$$

对勒让德多项式，下列递推公式成立：

$$(2n+1) \int_{-1}^{\lambda} P_n(u) d\mu = -P_{n-1}(\lambda) + P_{n+1}(\lambda), \quad (\text{II. III. 3})$$

$$(2n+1)\lambda P_n(\lambda) = nP_{n-1}(\lambda) + (n+1)P_{n+1}(\lambda). \quad (\text{II. III. 4})$$

勒让德多项式为微分方程

$$\frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda^2 - 1) \frac{dP_n(\lambda)}{d\lambda} \right] - n(n+1)P_n(\lambda) = 0 \quad (\text{II. III. 5})$$

的解。

将等式 (2.39) 中的 $u(k, \lambda)$ 值代入方程 (2.38) 中，得到

$$\begin{aligned} \sum_n' d_n(k) \frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda^2 - 1) \frac{dP_n(\lambda)}{d\lambda} \right] + (k\lambda)^2 \sum_n' d_n(k) P_n(\lambda) &= \\ &= C \sum_n' d_n(k) P_n(\lambda). \end{aligned} \quad (\text{II. III. 6})$$

根据 (II. III. 5)，用 $n(n+1)P_n(\lambda)$ 来代替 (II. III. 6) 中的 $\frac{d}{d\lambda} \left[(\lambda^2 - 1) \frac{dP_n(\lambda)}{d\lambda} \right]$ ，并将 λ^2 置入 \sum' 符号内，则 (II. III. 6) 具有

$$\begin{aligned} \sum_n' d_n(k) n(n+1) P_n(\lambda) + k^2 \sum_n' d_n(k) \lambda^2 P_n(\lambda) &= \\ &= C \sum_n' d_n(k) P_n(\lambda) \end{aligned} \quad (\text{II. III. 7})$$

的形式。

由式 (II. III. 4) 可看出

$$\lambda P_n(\lambda) = \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(\lambda) + \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(\lambda). \quad (\text{II. III. 8})$$

将等式 (II. III. 8) 两边用 λ 乘之，得到

$$\lambda^2 P_n(\lambda) = \frac{n}{2n+1} \lambda P_{n-1}(\lambda) + \frac{n+1}{2n+1} \lambda P_{n+1}(\lambda). \quad (\text{II. III. 9})$$

将公式 (II. III. 8) 用在 $\lambda P_{n-1}(\lambda)$ 与 $\lambda P_{n+1}(\lambda)$, 得到

$$\lambda P_{n-1}(\lambda) = \frac{n-1}{2n-1} P_{n-2}(\lambda) + \frac{n}{2n-1} P_n(\lambda), \quad (\text{II. III. 10})$$

与

$$\lambda P_{n+1}(\lambda) = \frac{n+1}{2n+3} P_n(\lambda) + \frac{n+2}{2n+3} P_{n+2}(\lambda). \quad (\text{II. III. 11})$$

将 (II. III. 10) 与 (II. III. 11) 代入 (II. III. 9), 则有

$$\begin{aligned} \lambda^2 P_n(\lambda) &= \frac{n}{2n+1} \left[\frac{n-1}{2n-1} P_{n-2}(\lambda) + \frac{n}{2n-1} P_n(\lambda) \right] + \\ &+ \frac{n+1}{2n+1} \left[\frac{n+1}{2n+3} P_n(\lambda) + \frac{n+2}{2n+3} P_{n+2}(\lambda) \right] = \\ &= \frac{n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} P_{n-2}(\lambda) + \left[\frac{n^2}{4n^2-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \right] P_n(\lambda) + \\ &\quad + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}(\lambda), \quad (\text{II. III. 12}) \end{aligned}$$

将 (II. III. 12) 中所得到的 $\lambda^2 P_n(\lambda)$ 表达式代入 (II. III. 7) 中, 并将所得到的式中的第二项分为诸项之和, 得到

$$\begin{aligned} \sum_n' d_n(k) n(n+1) P_n(\lambda) + k^2 \left\{ \sum_n' d_n(k) \frac{n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} P_{n-2}(\lambda) \right. \\ \left. + \sum_n' d_n(k) \left[\frac{n^2}{4n^2-1} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \right] P_n(\lambda) + \right. \\ \left. + \sum_n' d_n(k) \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}(\lambda) \right\} = \end{aligned}$$

$$= C \sum_n' d_n(k) P_n(\lambda), \quad (\text{II. III. 13})$$

均衡 (II. III. 13) 中 $P_n(\lambda)$ 的系数, 同时考虑到如用 $n+2$ 代 n , 则 $\sum_n' P_{n-2}(\lambda)$ 中将包括有 $P_n(\lambda)$; 如果用 $n-2$ 代 n , 则 $\sum_n' P_{n+2}(\lambda)$ 中将包括 $P_n(\lambda)$ 。结果得到

$$d_n(k)n(n+1) + k^2 \left\{ d_{n+2}(k) \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+5)(2n+3)} + \right. \\ \left. + d_n(k) \left[\frac{2n^2+2n-1}{(2n-1)(2n+3)} \right] + \frac{d_{n-2}(k)(n-1)n}{(2n-3)(2n-1)} \right\} = C d_n(k). \quad (\text{II. III. 14})$$

由此可得

$$k^2 \left[\frac{(n-1)n}{(2n-3)(2n-1)} d_{n-2} + \frac{2n^2+2n-1}{(2n-1)(2n+3)} d_n + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} d_{n+2} \right] = [C - n(n+1)] d_n. \quad (\text{II. III. 15})$$

当以差任意乘数的精确度给定 $C = C_0(k)$ 时, 系数 $d_n(k)$ 由上面这个递推公式来确定, 任意乘数的选择应当使

$$u(k, 0) = P_0(0) = 1. \quad (\text{II. III. 16})$$

在制表 [文献 9] 时考虑了条件 (II. III. 16), 因此在确定系数 d_n 时可用到这些表。

为了按公式 (II. III. 15) 来确定系数 d_n , 根据下面条件来给定 d_0 :

$$u(k, \lambda) = u(k, 0) = \sum_n' d_n(k) P_n(\lambda) \\ = \sum_n' d_n(k) P_n(0) = 1. \quad (\text{II. III. 17})$$

认为 d_n 已知, 在 (II. III. 15) 中取 $n=0$; 结果得到

$$k^2 \left[0 \cdot d_{n-2} + \frac{1}{3} d_0 + \frac{2}{15} d_2 \right] = C d_0,$$

由此

$$d_2 = \left(\frac{15C}{2k^2} - \frac{5}{2} \right) d_0. \quad (\text{II. III. 18})$$

然后, 用 d_0 来表示 $d_4, d_6, d_8 \dots$

将这些表示为 d_0 的式子代入 (II. III. 17), 确定出 d_0 , 从而利用这些式子确定其他系数。确定分隔常数 C 的方法刊在 [文 9, 第 15—17 页] 中。

下面列出不同的 k 值下系数 d_n 的表。

計算在給定頻帶中包含最大部分

k	最大 $F(k)$ %	$C_0(k)$	$+d_0(k)$	$-d_2(k)$	$+d_2(k)$
0	0	1	0	0	0
0.1	6.36	0.00333	0.99945	0.001110	0.00000019
0.2	12.68	0.01331	0.99778	0.004129	0.00000304
0.4	25.02	0.05296	0.99122	0.017532	0.00004802
0.5	30.97	0.08242	0.98637	0.027180	0.00011623
0.6	36.72	0.11810	0.98053	0.38763	0.00023849
0.8	47.53	0.20739	0.96608	0.067281	0.0007339
1.0	57.26	0.31900	0.94837	0.10195	0.0017316
1.2	65.78	0.45073	0.92796	0.14147	0.0034449
1.4	73.07	0.60010	0.90547	0.18446	0.0060801
1.5	76.26	0.68058	0.89363	0.20680	0.0078006
1.6	79.15	0.76447	0.88152	0.22949	0.0098150
1.8	84.10	0.94120	0.85672	0.27526	0.014783
2.0	88.05	1.12773	0.83162	0.32059	0.021062
2.2	91.14	1.32174	0.80669	0.36450	0.028673
2.4	93.50	1.52117	0.78230	0.40625	0.037582
2.5	94.46	1.62238	0.77040	0.42614	0.042500
2.6	95.28	1.72433	0.75874	0.44531	0.047710
2.8	96.61	1.92986	0.73620	0.48135	0.058940
3.0	97.58	2.13673	0.71480	0.51422	0.071137
3.2	98.28	2.34119	0.69460	0.54392	0.084149
3.4	98.79	2.55172	0.67559	0.57052	0.097824
3.5	98.99	2.65540	0.66653	0.58271	0.10486
3.6	99.15	2.75899	0.65775	0.59419	0.11201
3.8	99.41	2.96581	0.64103	0.61513	0.12657
4.0	99.59	3.17207	0.62537	0.63356	0.14138
4.2	99.72	3.37775	0.61068	0.64969	0.15631
4.4	99.80	3.58286	0.69690	0.66376	0.17127
4.5	99.83	3.68521	0.59033	0.67009	0.17873
4.6	99.86	3.78743	0.58396	0.67598	0.18616
4.8	99.90	3.99150	0.57179	0.68654	0.20092
5.0	99.94	4.19514	0.56032	0.69561	0.21518

能量的信号 $u(k, \lambda)$ 的形狀的系数 d_n

表 II. III. 1

$-d_6(k)$	$+d_8(k)$	$-d_{10}(k)$	$+d_{12}(k)$	$-d_{14}(k)$
0	0	0	0	0
0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.00000006	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.00000021	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.00000062	0.00000001	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.00000338	0.00000009	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.000012439	0.00000049	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.000035561	0.00000203	0.00000001	0.00000000	0.00000000
0.000085205	0.00000663	0.00000003	0.00000000	0.00000000
0.00012530	0.00001118	0.00000006	0.00000000	0.00000000
0.00017908	0.00001816	0.00000012	0.00000000	0.00000000
0.00034007	0.00001851	0.00000036	0.00000000	0.00000000
0.00059551	0.00009388	0.00000094	0.00000000	0.00000000
0.00097590	0.00018558	0.00000225	0.00000002	0.00000000
0.0015133	0.00034127	0.00000492	0.00000005	0.00000000
0.0018509	0.00045205	0.00000706	0.00000008	0.00000000
0.0022397	0.00059042	0.00000996	0.00000012	0.00000000
0.0031852	0.00096952	0.00001890	0.00000026	0.00000000
0.0043773	0.0015220	0.00003398	0.00000053	0.00000000
0.0058391	0.0022976	0.00005815	0.00000103	0.00000001
0.0075896	0.0033517	0.00009538	0.00000189	0.00000003
0.0085776	0.0040017	0.00012042	0.00000253	0.00000004
0.0096427	0.0047440	0.00015071	0.00000334	0.00000005
0.0120080	0.0065377	0.00023036	0.00000567	0.00000010
0.014689	0.0087978	0.00034182	0.00000930	0.00000019
0.017687	0.011590	0.00049391	0.00001476	0.00000033
0.020997	0.014981	0.00069681	0.00002276	0.00000055
0.022768	0.016920	0.00082085	0.00002798	0.00000071
0.024614	0.019032	0.00096202	0.00003420	0.00000090
0.028526	0.023806	0.0013023	0.00005019	0.00000143
0.032721	0.029359	0.0017318	0.00007208	0.00000223

附录 IV

计算积分 $A(k)$, $B(k)$ 与 $C(k)$ 的公式

$$\begin{aligned}
 1) \quad A(k) &= \int_0^k \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{k}{d}\right)^2\right]^2} \frac{\sin^2 k}{k^2} dk = \\
 &= \text{Si} 2k - \frac{\sin^2 k}{k} - \frac{k}{4(k^2 - d^2)} + \frac{3}{8d} \ln \left| \frac{k+d}{k-d} \right| + \\
 &+ \frac{\cos 2d}{8} \left\{ \frac{3}{d} [\text{Ci} 2(k-d) - \text{Ci} 2(k+d)] + \frac{\cos 2(k+d)}{k+d} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos 2(k-d)}{k-d} + 2\text{Si}(k+d) + 2\text{Si}(k-d) \right\} + \\
 &+ \frac{\sin 2d}{8} \left\{ -\frac{3}{d} [\text{Si} 2(k+d) + \text{Si}(k-d)] + \frac{\sin 2(k+d)}{k+d} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin 2(k-d)}{k-d} - \text{Ci}(k+d) + 2\text{Ci}(k-d) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad B(k) &= \int_0^k \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{k}{d}\right)^2\right]^2} \frac{2 \sin k \sin \xi k}{k^2} dk = \\
 &= \frac{2 \sin k \sin \xi k}{k} - (1 - \xi) \text{Si}(1 - \xi)k + \\
 &\quad + (1 + \xi) \text{Si}(1 + \xi)k + \frac{3}{4d} \left\{ -\text{Ci}[(1 - \xi)k + \pi] + \right. \\
 &\quad + \text{Ci}[(1 - \xi)k - \pi] - \cos[(1 + \xi)d] [\text{Ci}(1 + \xi)(k+d) - \\
 &\quad - \text{Ci}(1 + \xi)(k-d)] - \sin[(1 + \xi)d] [\text{Si}(1 + \xi)(k+d) + \\
 &\quad + \text{Si}(1 + \xi)(k-d)] \left. \right\} + \frac{1 - \xi}{4} \left\{ \frac{\cos[(1 - \xi)k + \pi]}{(1 - \xi)k + \pi} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos[(1 - \xi)k - \pi]}{(1 - \xi)k - \pi} + \text{Si}[(1 - \xi)k + \pi] + \text{Si}[(1 - \xi)k - \pi] \right\} + \\
 &+ \frac{1 + \xi}{4} \left\{ \cos[(1 + \xi)d] \cdot \left[\frac{\cos(1 + \xi)(k+d)}{(1 + \xi)(k+d)} + \frac{\cos(1 + \xi)(k-d)}{(1 + \xi)(k-d)} \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Si}(1+\xi)(k+d) + \text{Si}(1+\xi)(k-d) \Big] - \sin [(1 \\
& + \xi)d] \Big] - \frac{\sin(1+\xi)(k+d)}{(1+\xi)(k+d)} + \frac{\sin(1+\xi)(k-d)}{(1+\xi)(k-d)} + \\
& + \text{Ci}(1+\xi)(k+d) - \text{Ci}(1+\xi)(k-d) \Big\} , \\
3) \quad C(k) = & \int_0^k \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{k}{d}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sin^2 \xi k}{k^2} dk = \xi \left(\left[\text{Si } 2\xi k - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sin^2 \xi k}{\xi k} \right] - \frac{k}{4\xi(k^2-d^2)} + \frac{3}{8\xi d} \ln \left| \frac{k+d}{k-d} \right| + \right. \\
& \left. + \frac{\cos 2\xi d}{8\xi} \left\{ \frac{3}{d} [\text{Ci } 2\xi(k-d) - \text{Ci } 2\xi(k+d)] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\cos 2\xi(k+d)}{k+d} + \frac{\cos 2\xi(k-d)}{k-d} + 2\xi [\text{Si } 2\xi(k+d) \right. \right. \\
& \left. \left. + \text{Si } 2\xi(k-d)] \right\} + \frac{\sin 2\xi d}{8\xi} \left\{ -\frac{3}{d} [\text{Si } 2\xi(k+d) + \text{Si } 2\xi(k-d)] + \right. \\
& \left. + \frac{\sin 2\xi(k+d)}{k+d} - \frac{\sin 2\xi(k-d)}{k-d} \right. \\
& \left. \left. - 2\xi [\text{Ci } 2\xi(k+d) - \text{Ci } 2\xi(k-d)] \right\} \right) ,
\end{aligned}$$

在积分 $A(k)$ 、 $B(k)$ 与 $C(k)$ 中, $d = \frac{x}{1-\xi}$.

附录 V

洛麦利函数 $s_{\mu, \nu}(z)$

现在来研究形式为

$$\nabla_{\nu} y = kz^{\mu+1} \quad (\text{II. V. 1})$$

的微分方程, 式中

$$\nabla_{\nu} = z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + z^2 - \nu^2;$$

y ——待求函数;

z ——待求函数的变数；

k 与 μ ——常数。

方程(II. V. 1)的特解为下列形式的函数：

$$\begin{aligned}
 y &= k \left[-\frac{z^{\mu+1}}{(\mu+1)^2 - \nu^2} - \frac{z^{\mu-3}}{[(\mu+1)^2 - \nu^2][(\mu+3)^2 - \nu^2]} + \dots \right] = \\
 &= kz^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{2m+2}}{\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)_{m+1} \left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)_{m+1}} = \\
 &= kz^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right)} \\
 & \hspace{20em} \text{(II. V. 2)} \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

等式(II. V. 2)第二行中 $(\dots)_{m+1}$ 表示 $(m+1)$ 个因子的乘积，其中第一个因子与括号中表达式相等，而后面每一个因子比前一个因子多1。

借助于分子与分母同乘

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right),$$

将 Γ 函数引入等式(II. V. 2)的第三行中。

① (II. V. 2)中的第二等式意义不够明确，宜写为

$$\begin{aligned}
 &kz^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{2m+2}}{\left[\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + 1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + m + \frac{1}{2}\right)\right] \times} \\
 &\quad \times \left[\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + 1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + m + \frac{1}{2}\right)\right]
 \end{aligned}$$

再利用递推公式 $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ，即可化为第三等式——译者。

为了简便起见, 将(Π. V. 2)右边部分写为

$$y = k s_{\mu, \nu}(z)$$

的形式。

于是, 我们引进了洛麦利函数 $s_{\mu, \nu}(z)$ 。显然, 如果任何一个 $\mu \pm \nu$ 为负的奇数时, 该函数变得不确定。

对洛麦利函数 $s_{\mu, \nu}(z)$, 下列递推公式成立:

$$s_{\mu+2, \nu}(z) = z^{\mu+1} - [(\mu+1)^2 - \nu^2] s_{\mu, \nu}(z). \quad (\text{Π. V. 3})$$

其次, 不难验证:

$$\frac{d}{dz} [z^\nu s_{\mu, \nu}(z)] = (\mu + \nu - 1) z^\nu s_{\mu-1, \nu-1}(z). \quad (\text{Π. V. 4})$$

实际上, 在等式(Π. V. 4)的右边部分与左边部分中, 代入从公式(Π. V. 2)第一行所得到的 $s_{\mu, \nu}(z)$ 值:

$$s_{\mu, \nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu+1)^2 - \nu^2} - \frac{z^{\mu+3}}{[(\mu+1)^2 - \nu^2][(\mu+3)^2 - \nu^2]} + \dots \quad (\text{Π. V. 5})$$

将 $s_{\mu, \nu}(z)$ 代入表达式(Π. V. 4)的左边, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left(z^\nu \left\{ \frac{z^{\mu+1}}{(\mu+1)^2 - \nu^2} - \frac{z^{\mu+3}}{[(\mu+1)^2 - \nu^2][(\mu+3)^2 - \nu^2]} + \dots \right\} \right) = \\ & = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z^{\mu+\nu+1}}{(\mu+1)^2 - \nu^2} - \frac{z^{\mu+\nu+3}}{[(\mu+1)^2 - \nu^2][(\mu+3)^2 - \nu^2]} + \dots \right\} = \\ & = \frac{(\mu + \nu + 1) z^{\mu+\nu}}{(\mu+1)^2 - \nu^2} - \frac{(\mu + \nu + 3) z^{\mu+\nu+2}}{[(\mu+1)^2 - \nu^2][(\mu+3)^2 - \nu^2]} + \dots = \\ & = \frac{z^{\mu+\nu}}{\mu - \nu + 1} - \frac{z^{\mu+\nu+2}}{(\mu + \nu + 1)(\mu - \nu + 1)(\mu - \nu + 3)} + \dots \end{aligned}$$

将 $s_{\mu, \nu}(z)$ 值代入表达式(Π. V. 4)的右边, 得到

$$\begin{aligned} & (\mu + \nu - 1) z^\nu s_{\mu-1, \nu-1}(z) = \\ & = (\mu + \nu + 1) z^\nu \left\{ \frac{z^\mu}{\mu^2 - (\nu-1)^2} - \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \frac{z^{\mu+2}}{[\mu^2 - (\nu-1)^2][(\mu+2)^2 - (\nu-1)^2]} + \dots \right\} = \\
& = \frac{(\mu+\nu-1)z^{\mu+\nu}}{\mu^2 - (\nu-1)^2} - \frac{(\mu+\nu-1)z^{\mu+\nu+2}}{[\mu^2 - (\nu-1)^2][(\mu+2)^2 - (\nu-1)^2]} + \dots = \\
& = \frac{(\mu+\nu-1)z^{\mu+\nu}}{(\mu+\nu-1)(\mu-\nu+1)} \\
& - \frac{(\mu+\nu-1)z^{\mu+\nu+2}}{(\mu+\nu-1)(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)(\mu-\nu+3)} + \dots = \\
& = \frac{z^{\mu+\nu}}{\mu-\nu+1} - \frac{z^{\mu+\nu+2}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)(\mu-\nu+3)} + \dots
\end{aligned}$$

亦即等式(Π. V. 4)得证。

由等式(Π. V. 4)可知

$$\nu z^{\nu-1} s_{\mu, \nu}(z) + s'_{\mu, \nu}(z) z^{\nu} = (\mu + \nu - 1) z^{\nu} s_{\mu-1, \nu-1}(z). \quad (\text{Π. V. 6})$$

将等式(Π. V. 6)的两边除以 z^{ν} ，则可得到

$$s'_{\mu, \nu}(z) + \frac{\nu}{z} s_{\mu, \nu}(z) = (\mu + \nu - 1) s_{\mu-1, \nu-1}(z). \quad (\text{Π. V. 7})$$

类似地可得到

$$s'_{\mu, \nu}(z) - \frac{\nu}{z} s_{\mu, \nu}(z) = (\mu - \nu - 1) s_{\mu-1, \nu+1}(z). \quad (\text{Π. V. 8})$$

由等式(Π. V. 7)中减去等式(Π. V. 8)，得到

$$\begin{aligned}
\frac{2\nu}{z} s_{\mu, \nu}(z) &= (\mu + \nu - 1) s_{\mu-1, \nu-1}(z) - (\mu - \nu - 1) s_{\mu-1, \nu+1}(z). \\
& \hspace{20em} (\text{Π. V. 9})
\end{aligned}$$

我們感兴趣的是函数 $s_{\mu, \nu}(z)$ 当 $\mu=0$ ， -1 时的特殊情形(参阅第七章)，亦即 $s_{0, \nu}(z)$ 与 $s_{-1, \nu}(z)$ ，根据公式(Π. V. 5)，它們具有形式

$$s_{0,\nu}(z) \equiv \frac{z}{1^2 - \nu^2} - \frac{z^3}{(1^2 - \nu^2)(3^2 - \nu^2)} + \frac{z^5}{(1^2 - \nu^2)(3^2 - \nu^2)(5^2 - \nu^2)} - \dots, \quad (\text{II. V. 10})$$

$$s_{-1,\nu}(z) \equiv -\frac{1}{\nu^2} + \frac{z^2}{\nu^2(2^2 - \nu^2)} - \frac{z^4}{\nu^2(2^2 - \nu^2)(4^2 - \nu^2)} + \dots \quad (\text{II. V. 11})$$

在表 II. V. 1 与 II. V. 2 中给出 $s_{0,\nu}(z)$ 与 $s_{-1,\nu}(z)$ 的数值，而在图 II. V. 1 与 II. V. 2 中（参阅书末插页）给出了函数 $s_{0,\nu}(z)$ 与 $s_{-1,\nu}(z)$ 的图形，它们是根据公式 (II. V. 10) 与 (II. V. 11) 而计算出来的。

根据表示式 (II. V. 9)， $s_{0,\nu}(z)$ 与 $s_{-1,\nu}(z)$ 之间以等式

$$\frac{2\nu}{z} s_{0,\nu}(z) = (\nu - 1) s_{-1,\nu-1}(z) + (\nu + 1) s_{-1,\nu+1}(z)$$

相联系，该式使按公式 (II. V. 10) 与 (II. V. 11) 所计算出来的结果易于得到校核。

洛 麦 利 函

z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.05	-99.93735	-24.98422	-11.10401	-6.24593	-3.99733
0.1	-99.74953	-24.93691	-11.08271	-6.23273	-3.98934
0.15	-99.43688	-24.85815	-11.04726	-6.21343	-3.97693
0.20	-99.00000	-24.74810	-10.99773	-6.18506	-3.95744
0.25	-98.43980	-24.60697	-10.93420	-6.14867	-3.93360
0.30	-97.75702	-24.43502	-10.85680	-6.10435	-3.90455
0.35	-96.95326	-24.23256	-10.76567	-6.05216	-3.87034
0.40	-96.02992	-23.99998	-10.66098	-5.99220	-3.83106
0.45	-94.98872	-23.73772	-10.54294	-5.92460	-3.78676
0.50	-93.83162	-23.44627	-10.41177	-5.84948	-3.73753
0.55	-92.56378	-23.12617	-10.26770	-5.76697	-3.68348
0.60	-91.17855	-22.77802	-10.11101	-5.67724	-3.62469
0.65	-89.68756	-22.40249	-9.94200	-5.58047	-3.56128
0.70	-88.09055	-22.00026	-9.66097	-5.47681	-3.49337
0.75	-86.39051	-21.57208	-9.56828	-5.36648	-3.42109
0.80	-84.59061	-21.11877	-9.36428	-5.24967	-3.34458
0.85	-82.69418	-20.64114	-9.14935	-5.12662	-3.26398
0.90	-80.70477	-20.14012	-8.92390	-4.99755	-3.17944
0.95	-78.62603	-19.61662	-8.68833	-4.86271	-3.09112
1.0	-76.46187	-19.07160	-8.44310	-4.72233	-2.99919
1.05	-74.21623	-18.50609	-8.18867	-4.57669	-2.90382
1.10	-71.89330	-17.92113	-7.92549	-4.42606	-2.80519
1.15	-69.49733	-17.31780	-7.65406	-4.27071	-2.70349
1.20	-67.03277	-16.69720	-7.37489	-4.11095	-2.59890
1.25	-64.50111	-16.06050	-7.08847	-3.94706	-2.59890

数 $s_{-1, \nu}(z)$

表 II. V. I

0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
-2.77587	-2.03937	-1.56134	-1.23360	-0.99917	-0.82571	-0.69376
-2.77015	-2.03501	-1.55785	-1.23070	-0.99667	-0.82249	-0.69173
-2.76063	-2.02776	-1.55205	-1.22588	-0.99251	-0.81980	-0.68835
-2.74733	-2.01762	-1.54395	-1.21913	-0.98670	-0.81463	-0.68362
-2.73028	-2.00463	-1.53355	-1.21048	-0.97925	-0.80801	-0.67756
-2.70949	-1.98879	-1.52089	-1.19994	-0.97018	-0.79995	-0.67018
-2.68503	-1.97016	-1.50599	-1.18754	-0.95930	-0.79046	-0.66149
-2.65692	-1.94875	-1.48887	-1.17330	-0.94723	-0.77957	-0.65151
-2.62524	-1.92461	-1.46956	-1.15724	-0.93341	-0.76728	-0.64027
-2.59003	-1.89779	-1.44812	-1.13940	-0.91805	-0.75364	-0.62778
-2.55136	-1.86834	-1.42458	-1.11981	-0.90119	-0.73866	-0.61407
-2.50931	-1.83631	-1.39897	-1.09851	-0.88285	-0.72238	-0.59917
-2.46397	-1.80177	-1.37136	-1.07555	-0.86309	-0.70483	-0.58312
-2.41541	-1.76480	-1.34180	-1.05096	-0.84193	-0.68604	-0.56593
-2.36372	-1.72544	-1.31035	-1.02480	-0.81942	-0.66607	-0.54765
-2.30901	-1.68379	-1.27706	-0.99719	-0.79561	-0.64492	-0.52832
-2.25138	-1.63992	-1.24199	-0.96798	-0.77053	-0.62267	-0.50797
-2.19094	-1.59390	-1.20523	-0.93743	-0.74425	-0.59935	-0.48665
-2.12781	-1.54585	-1.16685	-0.90552	-0.71681	-0.57501	-0.46410
-2.06210	-1.49584	-1.12690	-0.87233	-0.68827	-0.54969	-0.44127
-1.99394	-1.44397	-1.08547	-0.83790	-0.65867	-0.52346	-0.41731
-1.92346	-1.39034	-1.04265	-0.80232	-0.62810	-0.49635	-0.39255
-1.85079	-1.33505	-0.99851	-0.76567	-0.59660	-0.46842	-0.36706
-1.77606	-1.27821	-0.95314	-0.72796	-0.56424	-0.43974	-0.34088
-1.69942	-1.21993	-0.90692	-0.68937	-0.53106	-0.41037	-0.31405

ε \ ν	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
0.05	-0.59108	-0.50957	-0.44381	-0.38995	-0.34524
0.1	-0.58913	-0.50770	-0.44190	-0.38793	-0.34291
0.15	-0.58597	-0.50458	-0.43874	-0.38454	-0.33902
0.20	-0.58150	-0.50022	-0.43431	-0.37981	-0.33359
0.25	-0.57578	-0.49464	-0.42864	-0.37375	-0.32663
0.30	-0.56881	-0.48783	-0.42173	-0.36633	-0.31816
0.35	-0.56061	-0.47983	-0.41361	-0.35770	-0.30819
0.40	-0.55119	-0.47064	-0.40428	-0.34774	-0.29675
0.45	-0.54058	-0.46028	-0.39376	-0.33652	-0.28386
0.50	-0.52879	-0.44878	-0.38209	-0.32406	-0.26956
0.55	-0.51585	-0.43616	-0.36929	-0.31040	-0.25388
0.60	-0.50180	-0.42245	-0.35538	-0.29556	-0.23684
0.65	-0.48665	-0.40767	-0.34040	-0.27958	-0.21851
0.70	-0.47044	-0.39187	-0.32436	-0.26249	-0.19890
0.75	-0.45320	-0.37506	-0.30733	-0.24432	-0.17807
0.80	-0.43488	-0.35730	-0.28932	-0.22513	-0.15607
0.85	-0.41580	-0.33860	-0.27039	-0.20495	-0.13294
0.90	-0.39571	-0.31903	-0.25056	-0.18383	-0.10874
0.95	-0.37474	-0.29861	-0.22988	-0.16181	-0.08354
1.0	-0.35295	-0.27740	-0.20840	-0.13895	-0.05736
1.05	-0.33038	-0.25512	-0.18617	-0.11529	-0.03030
1.10	-0.30707	-0.23275	-0.16323	-0.09089	-0.00240
1.15	-0.28308	-0.20942	-0.13964	-0.06581	-0.02628
1.20	-0.25845	-0.18547	-0.11543	-0.04009	-0.05566
1.25	-0.23324	-0.16096	-0.09068	-0.01380	-0.03563

(续表)

1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
-0.30726	-0.27523		-0.22814	-0.20722	-0.18941	-0.17386
-0.30438	-0.26991		-0.23229	-0.20907	-0.19050	-0.17460
-0.29952	-0.26106		-0.23918	-0.21213	-0.19233	-0.17582
-0.29245	-0.24869		-0.24881	-0.21641	-0.19488	-0.17754
-0.28338	-0.23281		-0.26114	-0.22190	-0.19815	-0.17874
-0.27235	-0.21355		-0.27615	-0.22857	-0.20212	-0.18241
-0.25937	-0.19086		-0.29380	-0.23641	-0.20679	-0.18555
-0.24447	-0.16482		-0.31404	-0.24540	-0.21214	-0.19915
-0.22770	-0.13552		-0.33682	-0.25552	-0.21816	-0.19819
-0.20908	-0.10300		-0.36207	-0.26674	-0.22493	-0.19767
-0.18868	-0.06735		-0.38974	-0.27902	-0.23213	-0.20258
-0.16652	-0.02866		-0.41976	-0.39233	-0.24004	-0.20789
-0.14267	+0.01299		-0.45202	-0.00665	-0.24854	-0.21359
-0.11718	+0.05746		-0.48648	-0.32192	-0.25761	-0.21967
-0.09011	+0.10470		-0.52303	-0.33812	-0.26772	-0.22610
-0.06151	+0.15256		-0.56158	-0.35519	-0.27734	-0.23288
-0.03128	+0.20690		-0.60200	-0.37308	-0.28794	-0.23997
-0.00006	+0.26164		-0.64424	-0.39175	-0.29900	-0.24735
+0.03265	+0.31861		-0.68814	-0.41116	-0.21048	-0.25502
+0.06660	+0.37768		-0.73360	-0.43123	-0.32233	-0.26293
+0.10160	+0.43872		-0.78050	-0.45193	-0.33456	-0.27108
+0.13783	+0.50157		-0.82874	-0.47319	-0.34710	-0.27942
+0.17497	+0.56610		-0.87816	-0.49495	-0.35993	-0.28793
+0.21299	+0.63208		-0.92863	-0.51716	-0.37298	-0.29661
+0.25181	+0.69943		-0.98004	-0.53975	-0.38627	-0.30540

ε \ ν	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
0.05	-0.16018	-0.14806	-0.13727	-0.12763	-0.11898
0.1	-0.16071	-0.14847	-0.13759	-0.12788	-0.11918
0.15	-0.16160	-0.14913	-0.13811	-0.12830	-0.11951
0.20	-0.16283	-0.15006	-0.13883	-0.12887	-0.11908
0.25	-0.16442	-0.15126	-0.13976	-0.12961	-0.12058
0.30	-0.16634	-0.15271	-0.14083	-0.13051	-0.12131
0.35	-0.16860	-0.15441	-0.14221	-0.13156	-0.12216
0.40	-0.17119	-0.15636	-0.14372	-0.13276	-0.12312
0.45	-0.17410	-0.15855	-0.14542	-0.13411	-0.12423
0.50	-0.17733	-0.16097	-0.14730	-0.13560	-0.12543
0.55	-0.18085	-0.16362	-0.14935	-0.13723	-0.12674
0.60	-0.18467	-0.16648	-0.15157	-0.13899	-0.12816
0.65	-0.18876	-0.16955	-0.15394	-0.14087	-0.12968
0.70	-0.19312	-0.17282	-0.15647	-0.14287	-0.13128
0.75	-0.19774	-0.17628	-0.15914	-0.14397	-0.13298
0.80	-0.20259	-0.17991	-0.16191	-0.14718	-0.13475
0.85	-0.20766	-0.18370	-0.16486	-0.14948	-0.13658
0.90	-0.21294	-0.18764	-0.16789	-0.15186	-0.13849
0.95	-0.21841	-0.19172	-0.17102	-0.15432	-0.14045
1.0	-0.22406	-0.19592	-0.17424	-0.15684	-0.14245
1.05	-0.22986	-0.20023	-0.17754	-0.15941	-0.14449
1.10	-0.23579	-0.20464	-0.18090	-0.16203	-0.14656
1.15	-0.24184	-0.20912	-0.18431	-0.16463	-0.14865
1.20	-0.24799	-0.21366	-0.18777	-0.16736	-0.15075
1.25	-0.25421	-0.21825	-0.19125	-0.17005	-0.15285

(續表)

3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
-0.11117	-0.10411	-0.09770	-0.09186	-0.08653	-0.08166	-0.07718
-0.11133	-0.10425	-0.09781	-0.09196	-0.08662	-0.08173	-0.07725
-0.11161	-0.10448	-0.09801	-0.09213	-0.08676	-0.08185	-0.07735
-0.11199	-0.10480	-0.09828	-0.09236	-0.08696	-0.08203	-0.07750
-0.11249	-0.10521	-0.09862	-0.09265	-0.08721	-0.08224	-0.07769
-0.11308	-0.10571	-0.09904	-0.09301	-0.08751	-0.08250	-0.0779
-0.11378	-0.10629	-0.09953	-0.09342	-0.08787	-0.08281	-0.0781
-0.11458	-0.10695	-0.10009	-0.09389	-0.08827	-0.08315	-0.07847
-0.11548	-0.10770	-0.10071	-0.09442	-0.08872	-0.08353	-0.07879
-0.11647	-0.10852	-0.10140	-0.09500	-0.08921	-0.08394	-0.07914
-0.11754	-0.10941	-0.10214	-0.09562	-0.08973	-0.08439	-0.07951
-0.11870	-0.11037	-0.10294	-0.09629	-0.09030	-0.08486	-0.07990
-0.11994	-0.11139	-0.10379	-0.09700	-0.09089	-0.08535	-0.08030
-0.12125	-0.11246	-0.10468	-0.09774	-0.09151	-0.08586	-0.08071
-0.12263	-0.11359	-0.10562	-0.09852	-0.09215	-0.08638	-0.08113
-0.12406	-0.11477	-0.10659	-0.09932	-0.09280	-0.08691	-0.08154
-0.12555	-0.11599	-0.10758	-0.10013	-0.09347	-0.08745	-0.08195
-0.12709	-0.11724	-0.10860	-0.10097	-0.09414	-0.08798	-0.08234
-0.12867	-0.11852	-0.10964	-0.10181	-0.09481	-0.08849	-0.08271
-0.13027	-0.11981	-0.11069	-0.10265	-0.09547	-0.08900	-0.08306
-0.13191	-0.12113	-0.11175	-0.10349	-0.09613	-0.08948	-0.08337
-0.13355	-0.12244	-0.11280	-0.10431	-0.09676	-0.08994	-0.08365
-0.13521	-0.12376	-0.11384	-0.10513	-0.09736	-0.09036	-0.08387
-0.13681	-0.12507	-0.11486	-0.10591	-0.09795	-0.09073	-0.08404
-0.13852	-0.12636	-0.11587	-0.10667	-0.09848	-0.09106	-0.08415

ε \backslash p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1.30	-61.91600	-15.40835	-6.79536	-3.77934	-2.38185
1.35	-59.27316	-14.74345	-6.49607	-3.60811	-2.26980
1.40	-56.58044	-14.06550	-6.19119	-3.43369	-2.15567
1.45	-53.84269	-13.37627	-5.88122	-3.25639	-2.03967
1.50	-51.06495	-12.67698	-5.56676	-3.07655	-1.92208
1.55	-48.25220	-11.96892	-5.24840	-2.89647	-1.80294
1.60	-45.40952	-11.25337	-4.92668	-2.71051	-1.68263
1.65	-42.54204	-10.52162	-4.60220	-2.52500	-1.56134
1.70	-39.65489	-9.80495	-4.27556	-2.33862	-1.43927
1.75	-36.75323	-9.07468	-3.94732	-2.15065	-1.31664
1.80	-32.84224	-8.34210	-3.61808	-1.96250	-1.19369
1.85	-30.92709	-7.60853	-3.28843	-1.77414	-1.07062
1.90	-28.01290	-6.87525	-2.95895	-1.58591	-0.94767
1.95	-25.10481	-6.14356	-2.63023	-1.39814	-0.82506
2.0	-22.20790	-5.41473	-2.30826	-1.21119	-0.70300
2.05	-19.32722	-4.69008	-4.97739	-1.02536	-0.58141
2.10	-16.46778	-3.97081	-1.65439	-0.84099	-0.46140
2.15	-13.63446	-3.25819	-1.33443	-0.65837	-0.34229
2.20	-10.83213	-2.55345	-1.01806	-0.47737	-0.22458
2.25	-8.06556	-1.85776	-0.70583	-0.29976	-0.10848
2.30	-5.33941	-1.17234	-0.39825	-0.12437	0.00581
2.35	-2.65823	-0.49829	-0.09585	-0.04801	0.11809
2.40	-0.02651	0.16323	0.20086	-0.21711	0.22819

(續表)

0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
-1.62102	-1.16031	-0.85994	-0.61989	-0.49716	-0.38034	-0.28668
-1.54100	-1.09917	-0.81050	-0.60961	-0.46258	-0.34973	-0.25877
-1.45949	-1.03752	-0.76110	-0.56861	-0.42750	-0.31860	-0.23040
-1.37669	-0.97458	-0.71090	-0.52700	-0.39169	-0.28701	-0.20161
-1.29270	-0.91077	-0.66004	-0.48481	-0.35552	-0.25502	-0.17248
-1.20771	-0.84621	-0.60858	-0.44216	-0.31896	-0.22270	-0.14307
-1.12188	-0.78102	-0.55663	-0.39912	-0.28207	-0.19011	-0.11342
-1.03535	-0.71533	-0.50431	-0.35577	-0.24494	-0.15731	-0.08359
-0.94828	-0.64923	-0.45167	-0.31220	-0.20763	-0.12439	-0.05306
-0.86085	-0.58288	-0.39886	-0.26848	-0.17021	-0.09137	-0.02368
-0.77819	-0.51639	-0.34594	-0.22471	-0.13276	-0.58335	+0.00630
-0.68551	-0.44586	-0.29303	-0.18095	-0.09535	-0.02538	-0.03621
-0.59789	-0.38346	-0.24022	-0.13729	-0.05805	+0.00747	0.06598
-0.51035	-0.31726	-0.19762	-0.09385	-0.02093	+0.04014	0.09558
-0.42363	-0.25143	-0.13532	-0.05065	0.01594	0.07256	0.12491
-0.33731	-0.18605	-0.08340	-0.00781	0.05247	0.10168	0.15394
-0.25170	-0.12124	-0.03198	0.03460	0.08863	0.13642	0.18263
-0.16698	-0.05715	0.01887	0.07652	0.12432	0.16773	0.21088
-0.08329	+0.00613	0.06903	0.11783	0.15948	0.19855	0.23867
-0.00078	0.06850	0.11844	0.15848	0.19106	0.22883	0.26592
0.08041	0.12983	0.16699	0.19842	0.22797	0.25848	0.29260
0.16013	0.19000	0.21460	0.23753	0.26017	0.28749	0.31863
0.23826	0.24894	0.26118	0.27577	0.29359	0.31577	0.34399

z \ ν	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
1.30	-0.20749	-0.13595	-0.6542	0.01300	0.11626
1.35	-0.18127	-0.11049	-0.03972	0.04027	0.14735
1.40	-0.15462	-0.08462	-0.01363	0.06792	0.17886
1.45	-0.12759	-0.05841	0.01280	0.09592	0.21073
1.50	-0.10026	-0.03191	0.03949	0.12418	0.24289
1.55	-0.07266	-0.00518	0.06640	0.15265	0.27524
1.60	-0.04487	0.01174	0.09347	0.18126	0.30774
1.65	-0.01693	0.04877	0.12065	0.20996	0.34028
1.70	+0.01109	0.07586	0.14787	0.23866	0.37282
1.75	+0.03914	0.10297	0.17506	0.26733	0.40528
1.80	0.06716	0.13002	0.20219	0.29589	0.43754
1.85	0.09510	0.15696	0.22918	0.32427	0.46958
1.90	0.12289	0.18375	0.25597	0.35250	0.50130
1.95	0.15049	0.21034	0.28251	0.38025	0.53264
2.0	0.17782	0.23660	0.30875	0.40772	0.56352
2.05	0.20485	0.26256	0.33462	0.43477	0.59387
2.10	0.23152	0.28813	0.36007	0.46135	0.62361
2.15	0.25775	0.31326	0.38504	0.48738	0.65268
2.20	0.28352	0.33792	0.40950	0.51280	0.68103
2.25	0.30877	0.36202	0.43337	0.53757	0.70856
2.30	0.33343	0.38553	0.45661	0.56162	0.73521
2.35	0.35747	0.40842	0.47916	0.58491	0.76095
2.40	0.38085	0.43060	0.50098	0.60739	0.78569

(續表)

1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
0.29134	0.76795		-1.03224	-0.56266	-0.39971	-0.31420
0.23149	0.83747		-1.08511	-0.58583	-0.41329	-0.32325
0.037214	0.90781		-1.13847	-0.60919	-0.42694	-0.33226
0.41323	0.97883		-1.19220	-0.63267	-0.44066	-0.34128
0.45465	1.05033		-1.24616	-0.65621	-0.45438	-0.35027
0.49628	1.12215		-1.30020	-0.67975	-0.46806	-0.35924
0.53804	1.19409		-1.35418	-0.70321	-0.48168	-0.36812
0.57983	1.26597		-1.40792	-0.72652	-0.49517	-0.37690
0.62155	1.33765		-1.46134	-0.74962	-0.50851	-0.38554
0.66310	1.40890		-1.51421	-0.77246	-0.52165	-0.39404
0.70458	1.47958		-1.56635	-0.79495	-0.53455	-0.40234
0.74528	1.54951		-1.61789	-0.81703	-0.54717	-0.41042
0.78573	1.61849		-1.66838	-0.83864	-0.55946	-0.41826
0.82481	1.68637		-1.71779	-0.85970	-0.57139	-0.42583
0.86481	1.75296		-1.76598	-0.88016	-0.58294	-0.43310
0.90326	1.81810		-1.81282	-0.89996	-0.59403	-0.44004
0.94086	1.88163		-1.85815	-0.91902	-0.60466	-0.44663
0.97752	1.94339		-1.90186	-0.93730	-0.61478	-0.45283
1.01316	2.00321		-1.94381	-0.95474	-0.62434	-0.45864
1.04767	2.06092		-1.98388	-0.97127	-0.63332	-0.46403
1.08098	2.11640		-2.02195	-0.98685	-0.64168	-0.46897
1.11300	2.16951		-2.05789	-1.00140	-0.64940	-0.47342
1.14367	2.22006		-2.09163	-1.01490	-0.65645	-0.47740

$z \backslash \nu$	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
1.30	-0.26050	-0.22287	-0.19474	-0.17274	-0.15493
1.35	-0.26681	-0.22751	-0.19823	-0.17541	-0.15701
1.40	-0.27315	-0.23214	-0.20171	-0.17807	-0.15905
1.45	-0.27974	-0.23676	-0.20516	-0.18069	-0.16105
1.50	-0.28576	-0.24133	-0.20857	-0.18326	-0.16300
1.55	-0.29201	-0.24586	-0.21193	-0.18582	-0.16490
1.60	-0.29818	-0.25031	-0.21521	-0.18822	-0.16672
1.65	-0.30426	-0.25467	-0.21841	-0.19095	-0.16846
1.70	-0.31023	-0.25894	-0.22151	-0.19285	-0.17012
1.75	-0.31606	-0.26307	-0.22450	-0.19503	-0.17167
1.80	-0.32172	-0.26707	-0.22737	-0.19708	-0.17311
1.85	-0.32721	-0.27092	-0.23009	-0.19900	-0.17444
1.90	-0.33250	-0.27459	-0.23266	-0.20079	-0.17563
1.95	-0.33757	-0.27807	-0.23507	-0.20243	-0.17669
2.0	-0.34240	-0.28136	-0.23730	-0.20390	-0.17759
2.05	-0.34696	-0.28452	-0.23935	-0.20521	-0.17835
2.10	-0.35123	-0.28725	-0.24118	-0.20633	-0.17894
2.15	-0.35523	-0.28983	-0.24281	-0.20727	-0.17935
2.20	-0.35891	-0.29215	-0.24420	-0.20801	-0.17958
2.25	-0.36224	-0.29419	-0.24536	-0.20853	-0.17963
2.30	-0.36523	-0.29594	-0.24628	-0.20884	-0.17948
2.35	-0.36785	-0.29739	-0.24693	-0.20893	-0.17913
2.40	-0.37007	-0.29852	-0.24733	-0.20878	-0.17857

(續表)

3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
-0.14015	-0.12763	-0.11684	-0.10739	-0.09897	-0.09134	-0.08420
-0.14175	-0.12887	-0.11777	-0.10806	-0.09942	-0.09155	-0.08416
-0.14332	-0.13006	-0.11866	-0.10868	-0.09980	-0.09170	-0.08405
-0.14485	-0.13121	-0.11949	-0.10925	-0.10011	-0.09177	-0.08384
-0.14632	-0.13230	-0.12027	-0.10974	-0.10035	-0.09175	-0.08354
-0.14774	-0.13333	-0.12097	-0.11017	-0.10052	-0.09165	-0.08313
-0.14908	-0.13428	-0.12160	-0.11051	-0.10059	-0.09145	-0.08260
-0.15034	-0.13516	-0.12215	-0.11078	-0.10058	-0.09114	-0.08196
-0.15151	-0.13594	-0.12216	-0.11094	-0.10046	-0.09073	-0.08119
-0.15259	-0.13663	-0.12296	-0.11100	-0.10023	-0.09020	-0.08029
-0.15355	-0.13721	-0.12322	-0.11095	-0.09990	-0.08954	-0.07925
-0.15441	-0.13768	-0.12336	-0.11080	-0.09944	-0.08876	-0.07806
-0.15514	-0.13804	-0.12339	-0.11052	-0.09886	-0.08784	-0.07672
-0.15574	-0.13826	-0.12329	-0.11011	-0.09815	-0.08678	-0.07522
-0.15621	-0.13836	-0.12305	-0.10958	-0.09730	-0.08558	-0.07356
-0.15652	-0.13831	-0.12268	-0.10890	-0.09630	-0.08422	-0.07173
-0.15668	-0.13811	-0.12217	-0.10808	-0.09517	-0.08271	-0.06972
-0.15668	-0.13776	-0.12151	-0.10711	-0.09387	-0.08103	-0.06754
-0.15651	-0.13726	-0.12069	-0.10600	-0.09243	-0.07920	-0.06517
-0.15618	-0.13658	-0.11972	-0.10472	-0.09082	-0.07718	-0.06262
-0.15565	-0.13574	-0.11858	-0.10327	-0.08994	-0.07500	-0.05987
-0.15494	-0.13472	-0.11728	-0.10167	-0.08710	-0.07264	-0.05693
-0.15404	-0.13352	-0.11579	-0.09989	-0.08499	-0.07010	-0.05379

z \ ν	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
2.5	1.44436	0.54428	0.38916	0.35096	0.35584	0.39246	0.47275
2.6	2.86309	0.85499	0.53213	0.43569	0.41430	0.43764	0.51164
2.7	3.81066	1.14723	0.66621	0.51482	0.46853	0.47919	0.54695
2.8	4.88097	1.41919	0.79054	0.58780	0.51817	0.51680	0.57839
2.9	5.86729	1.66919	0.90436	0.65417	0.56289	0.55020	0.60572
3.0	6.76398	1.89581	1.00699	0.71352	0.60239	0.57916	0.62873
3.1	7.56619	2.09780	1.09784	0.76552	0.63640	0.60316	0.64724
3.2	8.26983	2.27410	1.17643	0.80983	0.66477	0.62300	0.66112
3.3	8.87176	2.42391	1.24240	0.84630	0.68733	0.63761	0.67028
3.4	9.36959	2.54664	1.29549	0.87473	0.70397	0.64725	0.67465
3.5	9.76190	2.64194	1.33551	0.89505	0.71463	0.65187	0.67421
3.6	10.04811	2.70967	1.36246	0.90724	0.71935	0.65151	0.66906
3.7	10.22850	2.74992	1.37637	0.91137	0.71813	0.64621	0.65918
3.8	10.30425	2.76303	1.37741	0.90754	0.71114	0.63606	0.64472
3.9	10.27737	2.74954	1.36536	0.89592	0.69816	0.62123	0.65282
4.0	10.15070	2.71019	1.34209	0.87680	0.68032	0.60186	0.60268
4.1	9.92781	2.64594	1.30659	0.85015	0.65694	0.57818	0.57550
4.2	9.61311	2.55795	1.25989	0.81725	0.62863	0.55043	0.54453
4.3	9.21165	2.44757	1.20268	0.77761	0.59567	0.51891	0.51009
4.4	8.72911	2.31628	1.13565	0.73199	0.55844	0.48394	0.47246
4.5	8.17184	2.16574	1.05975	0.68092	0.51732	0.44581	0.43195
4.6	7.54662	1.99774	0.977548	0.62493	0.47274	0.40493	0.38904
4.7	6.86078	1.81422	0.88409	0.56463	0.42511	0.36165	0.34398
4.8	6.12197	1.61716	0.78648	0.50061	0.37492	0.31637	0.29722

(續表)

1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
0.61937	1.20059		-1.03853	-0.48378	-0.29981	-0.20776	-0.15165
0.63811	1.25119		-1.05738	-0.48799	-0.29972	-0.20573	-0.14843
0.72235	1.29493		-1.07112	-0.48987	-0.29818	-0.20265	-0.14437
0.75209	1.33138		-1.07948	-0.48933	-0.29514	-0.19818	-0.13944
0.77708	1.36012		-1.08223	-0.48628	-0.29055	-0.19320	-0.13364
0.79707	1.38085		-1.07921	-0.48067	-0.28440	-0.18882	-0.12696
0.81188	1.39329		-1.07029	-0.47244	-0.27665	-0.18330	-0.11940
0.82140	1.39729		-1.05541	-0.42159	-0.26732	-0.17068	-0.11098
0.82553	1.39274		-1.03455	-0.44812	-0.25642	-0.16097	-0.10174
0.82421	1.37958		-1.00776	-0.43208	-0.24399	-0.15021	-0.09162
0.81743	1.35778		-0.97511	-0.41351	-0.23067	-0.13842	-0.08087
0.80536	1.32776		-0.93677	-0.39252	-0.21472	-0.12568	-0.06935
0.78796	1.28940		-0.89293	-0.36917	-0.19802	-0.11202	-0.05717
0.76544	1.24309		-0.84338	-0.34362	-0.18006	-0.09756	-0.04441
0.73797	1.18915		-0.78986	-0.31602	-0.16093	-0.08233	-0.03113
0.70579	1.12799		-0.73124	-0.28652	-0.14076	-0.06645	-0.01741
0.66916	1.06009		-0.66341	-0.25534	-0.11967	-0.05002	-0.00335
0.62841	0.98595		-0.60183	-0.22266	-0.09778	-0.03313	+0.01099
0.58387	0.90618		-0.53191	-0.18871	-0.07527	-0.01539	+0.01549
0.53593	0.82138		-0.45924	-0.15371	-0.05227	0.00159	0.04008
0.48496	0.73225		-0.38425	-0.11794	-0.02893	0.01915	0.05462
0.43142	0.63947		-0.30753	-0.08162	-0.00542	0.03671	0.06904
0.37575	0.54379		-0.22965	-0.14502	-0.01809	0.05413	0.08322
0.31839	0.44598		-0.15118	-0.00841	0.04142	0.07130	0.09706

$\frac{z}{2}$	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4
2.5	-0.11229	-0.08023	-0.04693	0.01289		-0.15217	-0.09899
2.6	-0.10806	-0.07477	-0.03925	0.02698		-0.16368	-0.10413
2.7	-0.10310	-0.06858	-0.03076	0.04229		-0.17590	-0.10953
2.8	-0.09737	-0.06166	-0.02148	0.05881		-0.18877	-0.11518
2.9	-0.09090	-0.05403	-0.01140	0.07646		-0.20225	-0.12103
3.0	-0.08365	-0.04563	-0.00057	0.09524		-0.21629	-0.12706
3.1	-0.07567	-0.03663	0.01101	0.11506		-0.23081	-0.13324
3.2	-0.06698	-0.02693	0.02328	0.13583		-0.24575	-0.13953
3.3	-0.05758	-0.01660	0.03619	0.15748		-0.26101	-0.14589
3.4	-0.04753	-0.00567	0.04969	0.17989		-0.27651	-0.15227
3.5	-0.03687	-0.00577	0.06370	0.20295		-0.29214	-0.15862
3.6	-0.02564	-0.00770	0.07817	0.22652		-0.30778	-0.16491
3.7	-0.01390	0.03004	0.09298	0.25045		-0.32334	-0.17105
3.8	-0.00172	0.04273	0.10809	0.27459		-0.33865	-0.17702
3.9	0.01081	0.05569	0.12337	0.29879		-0.35367	-0.18274
4.0	0.02367	0.06884	0.13874	0.32288		-0.36819	-0.18815
4.1	0.03671	0.08208	0.15409	0.34671		-0.38211	-0.19321
4.2	0.04990	0.09535	0.16939	0.37002		-0.39529	-0.19784
4.3	0.06313	0.10854	0.18427	0.39270		-0.40761	-0.20200
4.4	0.07632	0.12156	0.19888	0.41454		-0.41892	-0.20562
4.5	0.08936	0.13431	0.21304	0.43535		-0.42911	-0.20865
4.6	0.10217	0.14670	0.22659	0.45499		-0.43803	-0.21104
4.7	0.11465	0.15863	0.23948	0.47324		-0.44556	-0.21273
4.8	0.12671	0.17002	0.25154	0.4899		-0.45162	-0.21369

(續表)

4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8
0.07773	-0.06506	-0.05617	-0.04935	-0.04377	-0.03884	-0.03344
-0.08077	-0.06706	-0.05755	-0.05020	-0.04439	-0.03913	-0.03316
-0.08333	-0.06912	-0.05395	-0.05125	-0.04498	-0.03936	-0.43274
-0.03720	-0.07122	-0.06035	-0.05218	-0.04552	-0.03950	-0.03214
-0.09056	-0.07335	-0.06175	-0.05307	-0.04601	-0.03955	-0.03136
-0.09358	-0.07550	-0.06314	-0.05393	-0.04643	-0.03947	-0.03035
-0.09745	-0.07764	-0.06449	-0.05472	-0.04676	-0.03931	-0.02910
-0.10093	-0.07976	-0.06578	-0.05545	-0.04700	-0.03898	-0.02759
-0.10441	-0.08183	-0.06701	-0.05608	-0.04712	-0.03849	-0.02578
-0.10785	-0.08382	-0.06816	-0.05661	-0.04711	-0.03782	-0.02365
-0.11121	-0.08575	-0.06919	-0.05702	-0.04696	-0.03696	-0.02117
-0.11448	-0.08755	-0.07011	-0.05729	-0.04665	-0.03589	-0.01832
-0.11761	-0.08921	-0.07088	-0.05741	-0.04615	-0.03459	-0.01503
-0.12057	-0.09070	-0.07149	-0.05736	-0.04547	-0.03304	-0.01142
-0.12332	-0.09201	-0.07191	-0.05712	-0.04458	-0.03123	-0.00732
-0.12583	-0.09310	-0.07213	-0.05667	-0.04346	-0.02915	-0.00277
-0.12806	-0.09395	-0.07213	-0.05600	-0.04211	-0.02678	+0.00226
-0.12997	-0.09454	-0.07189	-0.05510	-0.04051	-0.02410	+0.00778
-0.13151	-0.09484	-0.07139	-0.05395	-0.03864	-0.02111	+0.01330
-0.13273	-0.09483	-0.07061	-0.05254	-0.03651	-0.01781	+0.02032
-0.13349	-0.09449	-0.06955	-0.05086	-0.03410	-0.01417	+0.02736
-0.13382	-0.09380	-0.06818	-0.04889	-0.03140	-0.01021	0.03491
-0.13366	-0.09274	-0.06650	-0.04664	-0.02811	-0.00591	0.04297
-0.13302	-0.09129	-0.06450	-0.04409	-0.02512	-0.00128	0.05152

α \backslash β	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
4.95	2.24156	0.63051	0.33805	0.24562	0.22359
5.1	1.66654	0.46636	0.24639	0.17276	0.14447
5.25	1.07139	0.29740	0.15281	0.09916	0.06547
5.4	-0.46273	0.12738	0.05932	0.02633	-0.01188
5.55	-0.12668	-0.04047	-0.03237	-0.04453	-0.08631
5.7	-0.70530	-0.20267	-0.12043	-0.11201	-0.15645
5.85	-1.25596	-0.35646	-0.20344	-0.17504	-0.22126
6.00	-1.76851	-0.49910	-0.27991	-0.23261	-0.27971
6.15	-2.23579	-0.62860	-0.34888	-0.28401	-0.33113
6.30	-2.65165	-0.74333	-0.40953	-0.32867	-0.37503
6.45	-3.013570	-0.84270	-0.46155	-0.36641	-0.41129
6.60	-3.32148	-0.92669	-0.50303	-0.39738	-0.44017
6.75	-3.57992	-0.99868	-0.54074	-0.42223	-0.46239
6.90	-3.79771	-1.05516	-0.57015	-0.44210	-0.47931
7.05	-3.99018	-1.10648	-0.59558	-0.45890	-0.49296
7.20	-4.17985	-1.15695	-0.62055	-0.47536	-0.50629

(續表)

1.8	2.0	2.1	2.4	2.7	3.0
0.29689		-0.19173	0.04595	0.08640	0.11699
0.14750		0.05213	0.09880	0.11899	0.13557
0.00021		0.28914	0.14834	0.13986	0.15254
-0.14219		0.51502	0.19869	0.16353	0.16757
-0.27752		0.72640	0.24012	0.18467	0.18043
-0.40236		0.91966	0.27893	0.20292	0.19091
-0.51795		1.09215	0.31259	0.21805	0.19835
-0.61954		1.24139	0.34062	0.22983	0.20413
-0.70708		1.36598	0.36281	0.23818	0.20674
-0.77980		1.46502	0.37904	0.24312	0.20674
-0.73771		0.53887	0.38950	0.24477	0.20427
-0.88144		1.58893	0.39498	0.23344	0.19959
-0.91259		0.61813	0.39498	0.23958	0.19311
-0.93377		0.63115	0.39190	0.23388	0.18539
-0.94898		1.63483	0.38601	0.22731	0.17718
-0.96384		1.63370	0.38225	0.22113	0.16953

z \ ν	3.3	3.6	3.9	4.0	4.2
4.95	0.16203	0.26794	0.99778		-0.45769
5.1	0.17675	0.28196	1.02376		-0.45983
5.25	0.18965	0.29331	1.04051		-0.45781
5.4	0.20045	0.30172	1.04729		-0.45146
5.55	0.20899	0.30703	1.04381		-0.44064
5.7	0.21509	0.30905	1.02964		-0.42535
5.85	0.21864	0.30772	1.00493		-0.40564
6.00	0.21726	0.30302	0.96981		-0.38171
6.15	0.21798	0.29506	0.92438		-0.35386
6.30	0.21388	0.28401	0.87005		-0.32255
6.45	0.21750	0.27022	0.80773		-0.28835
6.60	0.19913	0.25405	0.73915		-0.25203
6.75	0.18920	0.23621	0.66635		-0.21473
6.90	0.17830	0.21747	0.59227		-0.17763
7.05	0.16717	0.19890	0.52039		-0.14235
7.20	0.15689	0.18187	0.45533		-0.11096

(續表)

4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.3
-0.16431	-0.08837	-0.04933	-0.01964	0.02772	-0.09826
-0.16161	-0.08452	-0.04512	-0.01351	0.03763	-0.10539
-0.15735	-0.07972	-0.03971	-0.00674	0.04882	-0.11270
-0.15151	-0.07398	-0.03360	0.00061	0.06065	-0.12007
-0.14407	-0.06730	-0.02684	0.00851	0.07305	-0.12743
-0.13508	-0.05974	-0.01948	0.01688	0.08588	-0.13466
-0.12455	-0.05136	-0.01156	0.02565	0.09900	-0.14164
-0.11264	-0.04224	-0.00321	0.03463	0.11224	-0.14823
-0.09946	-0.03249	0.00550	0.04388	0.12539	-0.15426
-0.08524	-0.02227	0.01442	0.05308	0.13821	-0.15960
-0.07021	-0.01173	0.02339	0.06213	0.15043	-0.16403
-0.05471	-0.00113	0.03220	0.07079	0.16173	-0.16733
-0.03914	-0.00929	0.04067	0.07884	0.17176	-0.1692
-0.02399	0.01918	0.04848	0.08597	0.18003	-0.16954
-0.00991	0.02815	0.05331	0.09185	0.18608	-0.16779
-0.00233	0.03567	0.06071	0.09603	0.18919	-0.16356

ε \ ν	6.6	6.9	7.2	7.5
4.95	-0.05854	-0.04296	-0.03361	-0.02622
5.1	-0.06135	-0.04432	-0.03416	-0.02696
5.25	-0.06415	-0.04551	-0.03459	-0.02571
5.4	-0.06689	-0.04677	-0.03488	-0.02516
5.65	-0.06951	-0.04780	-0.03499	-0.02437
5.7	-0.07196	-0.04865	-0.03490	-0.02333
5.85	-0.07419	-0.04928	-0.03458	-0.02200
6.00	-0.07614	-0.04966	-0.03400	-0.02034
6.15	-0.07772	-0.04972	-0.03312	-0.01833
6.30	-0.07888	-0.04944	-0.03190	-0.01593
6.45	-0.07951	-0.04876	-0.03031	-0.01310
6.60	-0.07953	-0.04761	-0.02823	-0.00981
6.75	-0.07882	-0.04592	-0.02530	-0.00600
6.90	-0.07725	-0.04361	-0.02276	-0.00161
7.05	-0.07466	-0.04049	-0.01911	+0.00346
7.20	-0.07085	-0.03670	-0.01472	0.00930

(續表)

7.8	8.1	8.4	8.7	9.0
-0.01554	-0.04464	-0.02587	-0.02142	-0.01870
-0.01376	-0.04963	-0.02728	-0.02226	-0.01928
-0.01158	-0.05530	-0.02884	-0.02317	-0.01989
-0.00896	-0.06171	-0.03055	-0.02414	-0.02054
-0.00585	-0.06892	-0.03242	-0.02519	-0.02122
-0.00222	-0.07697	-0.03446	-0.02630	-0.02193
-0.00199	-0.08591	-0.03666	-0.02749	-0.02267
-0.00531	-0.09580	-0.03904	-0.02874	-0.02343
+0.01230	-0.10667	-0.04160	-0.03006	-0.02422
0.01849	-0.11858	-0.04434	-0.03144	-0.02503
0.02545	-0.13159	-0.04727	-0.03289	-0.02586
0.03325	-0.14576	-0.05040	-0.03442	-0.02670
0.04194	-0.16122	-0.05375	-0.03601	-0.02757
0.05164	-0.17805	-0.05732	-0.03769	-0.02846
0.06250	-0.19649	-0.06118	-0.03947	-0.02939
0.07468	-0.21681	-0.06535	-0.04137	-0.03037

洛 麦 利 函

ν ρ	0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.05	0.04999	0.05049	0.05207	0.05493	0.05951
0.10	0.09989	0.10090	0.10405	0.10977	0.11892
0.15	0.14963	0.15114	0.15586	0.16442	0.17812
0.20	0.19911	0.20111	0.20740	0.21879	0.23702
0.25	0.24827	0.25078	0.25861	0.27281	0.29552
0.30	0.29701	0.30001	0.30937	0.32635	0.35352
0.35	0.34526	0.34875	0.35962	0.37936	0.41092
0.40	0.39293	0.39689	0.40928	0.43172	0.46763
0.45	0.43996	0.44439	0.45824	0.48336	0.52354
0.50	0.48625	0.49115	0.50644	0.53419	0.57857
0.55	0.53174	0.53709	0.55381	0.58413	0.63263
0.60	0.57634	0.58214	0.60025	0.63308	0.68562
0.65	0.62000	0.62633	0.64569	0.68099	0.73745
0.70	0.66263	0.66928	0.69007	0.72775	0.78804
0.75	0.70417	0.71123	0.73330	0.77331	0.83732
0.80	0.74455	0.75201	0.77531	0.81757	0.88518
0.85	0.78371	0.79155	0.81606	0.86049	0.93157
0.90	0.92158	0.82979	0.85545	0.90198	0.97640
0.95	0.85811	0.86663	0.89344	0.94198	1.01961
1.0	0.89324	0.90215	0.92997	0.98042	1.06112
1.05	0.92692	0.93615	0.96498	1.01726	1.10087
1.10	0.95909	0.96863	0.99841	1.05241	1.13930
1.15	0.98971	0.99954	1.02923	1.08585	1.17484
1.20	1.01874	1.02883	1.06037	1.11752	1.20896
1.25	1.04613	1.05647	1.08879	1.14738	1.24110

数 $s_{0,v}(z)$

表 II.V.2

0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
0.06665	0.07810	0.09801	0.13885	0.26303		-0.23802
0.13318	0.15607	0.19585	0.27745	0.52538		-0.47558
0.19949	0.23377	0.29334	0.41555	0.78730		-0.71223
0.26545	0.31106	0.39032	0.55291	1.04750		-0.94750
0.33096	0.38781	0.48661	0.68926	1.30577		-1.18095
0.39590	0.46388	0.58204	0.82430	1.56166		-1.41213
0.46017	0.53916	0.67644	0.95805	1.81470		-1.64060
0.52364	0.61350	0.76966	1.08998	2.06440		-1.86590
0.58623	0.68679	0.86153	1.21997	2.31035		-2.08763
0.64781	0.75887	0.95188	1.34778	2.55208		-2.30534
0.70829	0.82966	1.04057	1.47318	2.78915		-2.51863
0.76756	0.89900	1.12743	1.59595	3.02113		-2.72708
0.82553	0.96681	1.21232	1.71588	3.24763		-2.93033
0.88209	1.03294	1.29508	1.83274	3.46821		-3.12793
0.93716	1.09731	1.37359	1.94635	3.68249		-3.31957
0.99064	1.15978	1.45370	2.05651	3.89009		-3.50485
1.04244	1.22028	1.52928	2.15301	4.09063		-3.68344
1.09249	1.27867	1.60220	2.23570	4.28379		-3.85500
1.14070	1.33490	1.67234	2.30437	4.46920		-4.01922
1.18698	1.38885	1.73958	2.45887	4.64655		-4.17578
1.23128	1.44044	1.80382	2.59905	4.81553		-4.32441
1.27352	1.48958	1.86496	2.63474	4.97686		-4.46483
1.31363	1.53621	1.92288	2.71580	5.12726		-4.59677
1.35157	1.58023	1.97750	2.79212	5.26948		-4.72003
1.38725	1.62161	2.02874	2.86357	5.40230		-4.83437

$z \backslash \nu$	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
0.05	-0.11360	-0.07244	-0.05207	-0.03999	-0.03204
0.10	-0.22697	-0.14473	-0.10402	-0.07988	-0.06400
0.15	-0.33990	-0.21672	-0.15575	-0.11960	-0.09582
0.20	-0.45215	-0.28828	-0.20715	-0.15905	-0.12742
0.25	-0.56350	-0.35923	-0.25811	-0.19815	-0.15871
0.30	-0.67373	-0.42945	-0.30852	-0.23681	-0.18963
0.35	-0.78283	-0.49879	-0.35827	-0.27495	-0.22012
0.40	-0.88998	-0.56711	-0.40727	-0.31247	-0.25008
0.45	-0.99557	-0.63426	-0.45538	-0.34930	-0.27947
0.50	-1.09918	-0.70012	-0.50253	-0.38535	-0.30821
0.55	-1.20062	-0.76454	-0.54862	-0.42054	-0.33622
0.60	-1.29962	-0.82740	-0.59354	-0.45480	-0.36346
0.65	-1.39618	-0.88856	-0.63718	-0.48805	-0.38985
0.70	-1.48991	-0.94790	-0.67949	-0.52021	-0.41532
0.75	-1.58071	-1.00531	-0.72033	-0.55122	-0.43982
0.80	-1.66839	-1.06066	-0.75965	-0.58100	-0.46329
0.85	-1.75278	-1.11384	-0.79736	-0.60949	-0.48568
0.90	-1.83371	-1.16476	-0.83336	-0.63662	-0.50693
0.95	-1.91103	-1.21329	-0.86759	-0.66234	-0.52699
1.0	-1.98460	-1.25935	-0.90000	-0.68658	-0.54583
1.05	-2.05426	-1.30284	-0.93047	-0.70929	-0.56338
1.10	-2.11991	-1.34367	-0.95897	-0.73043	-0.57960
1.15	-2.18139	-1.38178	-0.98544	-0.74994	-0.59446
1.20	-2.23860	-1.41707	-0.00982	-0.76777	-0.60793
1.25	-2.29144	-1.44949	-0.03205	-0.78390	-0.61996

(續表)

1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
-0.02644	-0.02231	-0.01815	-0.01663	-0.01466	-0.01301	-0.01165
-0.05282	-0.04457	-0.03824	-0.03327	-0.02926	-0.02598	-0.02325
-0.07907	-0.06670	-0.05723	-0.04978	-0.04377	-0.03885	-0.03475
-0.10519	-0.08867	-0.07606	-0.06614	-0.05814	-0.05158	-0.04612
-0.13093	-0.11040	-0.09468	-0.08229	-0.07232	-0.06413	-0.05730
-0.15640	-0.13185	-0.11303	-0.09821	-0.08626	-0.07644	-0.06821
-0.18150	-0.15295	-0.13107	-0.11383	-0.09992	-0.08848	-0.07891
-0.20614	-0.17365	-0.14874	-0.12910	-0.11324	-0.10020	-0.08925
-0.23028	-0.19386	-0.16599	-0.14398	-0.12620	-0.11154	-0.09923
-0.25385	-0.21363	-0.18279	-0.15844	-0.13874	-0.12248	-0.10880
-0.27680	-0.23282	-0.19907	-0.17240	-0.15082	-0.13297	-0.11792
-0.29906	-0.25139	-0.21479	-0.18585	-0.16239	-0.14297	-0.12653
-0.32059	-0.26950	-0.22990	-0.19873	-0.17343	-0.15243	-0.13463
-0.34132	-0.28651	-0.24437	-0.21099	-0.18388	-0.16133	-0.14215
-0.36121	-0.30296	-0.25815	-0.22262	-0.19371	-0.16963	-0.14907
-0.38027	-0.31861	-0.27119	-0.23356	-0.20289	-0.17728	-0.15534
-0.39827	-0.33342	-0.28347	-0.24377	-0.21139	-0.18426	-0.16094
-0.41533	-0.34735	-0.29494	-0.25324	-0.21915	-0.19054	-0.16583
-0.43138	-0.36036	-0.30556	-0.26192	-0.22616	-0.19608	-0.17000
-0.44634	-0.37241	-0.31531	-0.26977	-0.23240	-0.20085	-0.17339
-0.46019	-0.38347	-0.32418	-0.27678	-0.23782	-0.20484	-0.17599
-0.47289	-0.39350	-0.33206	-0.28291	-0.24241	-0.20800	-0.17778
-0.48443	-0.40247	-0.33899	-0.28814	-0.24613	-0.21033	-0.17873
-0.49473	-0.41037	-0.34495	-0.29245	-0.24899	-0.21181	-0.17883
-0.50381	-0.41717	-0.34989	-0.29582	-0.25092	-0.21240	-0.17807

λ	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
0.05	-0.01050	-0.00952	-0.00867	-0.00794	-0.00729
0.10	-0.02094	-0.01898	-0.01728	-0.01581	-0.01449
0.15	-0.03129	-0.02834	-0.02578	-0.02353	-0.02151
0.20	-0.04150	-0.03754	-0.03410	-0.03106	-0.02823
0.25	-0.05151	-0.04654	-0.04220	-0.03830	-0.03459
0.30	-0.06128	-0.05528	-0.05000	-0.04520	-0.04048
0.35	-0.07077	-0.06372	-0.05746	-0.05169	-0.04581
0.40	-0.07992	-0.07180	-0.06453	-0.05770	-0.05049
0.45	-0.08869	-0.07947	-0.07114	-0.06317	-0.05444
0.50	-0.09704	-0.08670	-0.07725	-0.06803	-0.05757
0.55	-0.10493	-0.09342	-0.08280	-0.07223	-0.05981
0.60	-0.11230	-0.09961	-0.08776	-0.07571	-0.06106
0.65	-0.11913	-0.10521	-0.09205	-0.07841	-0.06126
0.70	-0.12538	-0.11019	-0.09565	-0.08027	-0.06033
0.75	-0.13100	-0.11450	-0.09851	-0.08125	-0.05820
0.80	-0.13596	-0.11811	-0.10058	-0.08128	-0.05480
0.85	-0.14022	-0.12098	-0.10183	-0.08033	-0.05007
0.90	-0.14376	-0.12308	-0.10221	-0.07835	-0.04395
0.95	-0.14654	-0.12436	-0.10170	-0.07530	-0.03639
1.0	-0.14853	-0.12482	-0.10026	-0.07113	-0.02734
1.05	-0.14972	-0.12441	-0.09786	-0.06583	-0.01674
1.10	-0.15007	-0.12311	-0.09446	-0.05935	-0.00456
1.15	-0.14956	-0.12091	-0.09005	-0.05166	+0.00924
1.20	-0.14816	-0.11777	-0.08462	-0.04275	0.02469
1.25	-0.14588	-0.11369	-0.07813	-0.03257	0.04183

(續表)

2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
-0.00672		-0.00583	-0.00512	-0.00506	-0.00474	-0.00445	-0.00418
-0.01327		-0.01180	-0.01091	-0.01016	-0.00951	-0.00892	-0.00838
-0.01947		-0.01806	-0.01653	-0.01535	-0.01433	-0.01343	-0.01261
-0.02517		-0.02475	-0.02234	-0.02065	-0.01923	-0.01800	-0.01689
-0.03018		-0.03200	-0.02341	-0.02611	-0.02425	-0.02265	-0.02123
-0.03434		-0.03995	-0.03481	-0.03177	-0.02940	-0.02740	-0.02565
-0.03750		-0.04875	-0.04159	-0.03766	-0.03472	-0.03227	-0.03016
-0.03948		-0.05852	-0.04882	-0.04383	-0.04022	-0.03729	-0.03478
-0.04014		-0.06939	-0.05655	-0.05031	-0.04593	-0.04245	-0.03952
-0.03931		-0.08149	-0.06484	-0.05713	-0.05189	-0.04780	-0.04439
-0.03686		-0.09494	-0.07375	-0.06432	-0.05810	-0.05333	-0.04941
-0.03263		-0.10986	-0.08333	-0.07193	-0.06460	-0.05908	-0.05459
-0.02649		-0.12636	-0.09364	-0.07998	-0.07140	-0.06504	-0.05995
-0.01830		-0.14455	-0.10471	-0.08850	-0.07852	-0.07125	-0.06548
-0.00794		-0.16454	-0.11661	-0.09752	-0.08599	-0.07770	-0.07121
+0.00470		-0.18641	-0.12936	-0.10706	-0.09381	-0.08442	-0.07714
0.01975		-0.21026	-0.14301	-0.11715	-0.10201	-0.09142	-0.08327
0.03731		-0.23617	-0.15761	-0.12781	-0.11060	-0.09870	-0.08963
0.05748		-0.26423	-0.17317	-0.13906	-0.11960	-0.10627	-0.09621
0.08033		-0.29447	-0.18975	-0.15091	-0.12901	-0.11415	-0.10302
0.10595		-0.32701	-0.20734	-0.16340	-0.13884	-0.12334	-0.11006
0.13444		-0.36187	-0.22599	-0.17651	-0.14912	-0.13081	-0.11735
0.16584		-0.39910	-0.24570	-0.19028	-0.15981	-0.13965	-0.12486
0.20019		-0.43869	-0.26650	-0.20469	-0.17097	-0.14830	-0.13262
0.23757		-0.48076	-0.28842	-0.21977	-0.18256	-0.15825	-0.14063

z	0	0.1	0.2	0.3	0.4
1.30	1.07183	1.08241	1.11546	1.17537	1.27120
1.35	1.09583	1.10663	1.14034	1.20146	1.29922
1.40	1.11808	1.12907	1.16339	1.22562	1.32516
1.45	1.13856	1.14972	1.18460	1.24782	1.34892
1.50	1.15724	1.16856	1.20392	1.26802	1.37052
1.55	1.17411	1.18556	1.22134	1.28620	1.38994
1.60	1.18913	1.20070	1.23685	1.30235	1.40711
1.65	1.20230	1.21397	1.25041	1.31645	1.42207
1.70	1.21362	1.22535	1.26203	1.32848	1.43476
1.75	1.22307	1.23436	1.27169	1.33845	1.44520
1.80	1.23064	1.24247	1.27940	1.34634	1.45338
1.85	1.23635	1.24818	1.28514	1.35216	1.45929
1.90	1.24018	1.25200	1.28895	1.35590	1.46296
1.95	1.24215	1.25306	1.29081	1.35760	1.46437
2.00	1.24227	1.25402	1.29073	1.35723	1.46356
2.05	1.24056	1.25225	1.28873	1.35485	1.46053
2.10	1.23704	1.24863	1.28484	1.35044	1.45531
2.15	1.23172	1.24319	1.27906	1.34405	1.44792
2.20	1.22462	1.23596	1.27143	1.33569	1.43840
2.25	1.21577	1.22698	1.26199	1.32541	1.42677
2.30	1.20522	1.21627	1.25075	1.31323	1.41309
2.35	1.19299	1.20385	1.23776	1.29921	1.39739
2.40	1.17911	1.18977	1.22307	1.28336	1.37971

(續表)

0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
1.42063	1.66025	2.07652	2.93002	5.52550		-4.93959
1.45169	1.69614	2.12077	2.99140	5.63886		-5.03550
1.48035	1.72918	2.16143	3.04760	5.74225		-5.12197
1.50658	1.75936	2.19842	3.09854	5.83517		-5.19832
1.53037	1.78663	2.23172	3.14415	5.91843		-5.26596
1.55167	1.81095	2.26126	3.18438	5.99099		-5.32326
1.57045	1.83230	2.28702	3.21915	6.05305		-5.37068
1.58672	1.85065	2.30899	3.24846	6.10458		-5.40812
1.60044	1.86599	2.32714	3.27228	6.14519		-5.43555
1.61160	1.87832	2.34143	3.29057	6.17577		-5.45295
1.62022	1.88732	2.35189	3.30335	6.19541		-5.46032
1.62629	1.89391	2.35851	3.31061	6.20443		-5.45770
1.62980	1.89716	2.36131	3.31237	6.20987		-5.44510
1.63073	1.89744	2.36029	3.30866	6.19776		-5.42261
1.62925	1.89471	2.35550	3.29952	6.16821		-5.39030
1.62521	1.88906	2.34695	3.28198	6.13531		-5.34825
1.61870	1.88046	2.33470	3.26514	6.09217		-5.29663
1.60975	1.86897	2.31878	3.24004	6.03895		-5.23554
1.59839	1.85464	2.29926	3.20977	5.97578		-5.16517
1.58467	1.83752	2.27618	3.17443	5.90286		-5.08567
1.56862	1.81765	2.24964	3.13410	5.82039		-4.99725
1.55029	1.79510	2.21970	3.08889	5.72256		-4.90014
1.52975	1.76993	2.18642	3.03895	5.62766		-4.79455

ν	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
1.30	-2.33981	-1.47896	-1.05210	-0.79827	-0.63053
1.35	-2.38360	-1.50543	-1.06991	-0.81087	-0.63961
1.40	-2.42277	-1.52886	-1.08546	-0.82166	-0.64718
1.45	-2.45723	-1.54919	-1.09870	-0.83061	-0.65322
1.50	-2.48692	-1.56639	-1.10962	-0.83771	-0.65770
1.55	-2.51180	-1.58043	-1.11819	-0.84293	-0.66061
1.60	-2.53182	-1.59128	-1.12440	-0.84628	-0.66196
1.65	-2.54697	-1.59894	-1.12823	-0.84773	-0.66173
1.70	-2.55722	-1.60337	-1.12966	-0.84723	-0.65991
1.75	-2.56256	-1.60459	-1.12873	-0.84493	-0.65652
1.80	-2.56300	-1.60259	-1.12540	-0.84069	-0.65154
1.85	-2.55854	-1.59740	-1.11970	-0.83456	-0.64500
1.90	-2.54921	-1.58900	-1.11164	-0.82256	-0.63689
1.95	-2.53506	-1.57745	-1.10124	-0.81670	-0.62725
2.0	-2.51610	-1.56276	-1.08851	-0.80500	-0.61607
2.05	-2.49211	-1.54497	-1.07349	-0.79148	-0.60339
2.10	-2.46403	-1.52413	-1.05621	-0.77618	-0.58922
2.15	-2.43104	-1.50027	-1.03673	-0.75912	-0.57361
2.20	-2.39353	-1.47346	-1.01507	-0.74033	-0.55656
2.25	-2.35160	-1.44376	-0.99127	-0.71988	-0.53814
2.30	-2.30530	-1.41124	-0.96539	-0.69780	-0.51836
2.35	-2.25479	-1.37597	-0.93750	-0.67410	-0.49727
2.40	-2.20017	-1.33802	-0.90764	-0.64887	-0.47491

(續表)

1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
-0.51160	-0.42283	-0.35380	-0.29821	-0.25195	-0.21211	-0.17638
-0.51811	-0.42734	-0.35667	-0.29964	-0.25206	-0.21090	-0.17381
-0.52331	-0.43069	-0.35847	-0.30009	-0.25121	-0.20879	-0.17033
-0.52719	-0.43285	-0.35919	-0.29951	-0.24942	-0.20574	-0.16593
-0.52972	-0.43382	-0.35882	-0.29794	-0.24666	-0.20176	-0.16060
-0.53091	-0.43358	-0.35737	-0.29534	-0.24294	-0.19685	-0.15433
-0.53072	-0.43216	-0.35482	-0.29172	-0.23825	-0.19099	-0.14714
-0.52919	-0.42951	-0.35115	-0.28708	-0.23258	-0.18420	-0.13901
-0.52627	-0.42564	-0.34640	-0.28142	-0.22595	-0.17646	-0.12997
-0.52201	-0.42057	-0.34054	-0.27474	-0.21836	-0.16780	-0.11999
-0.51637	-0.41429	-0.33359	-0.26704	-0.20980	-0.15822	-0.10911
-0.50939	-0.40682	-0.32556	-0.25835	-0.20029	-0.14771	-0.09733
-0.50106	-0.39816	-0.31645	-0.24866	-0.18986	-0.13631	-0.08465
-0.49140	-0.38833	-0.30627	-0.23798	-0.17850	-0.12402	-0.07111
-0.48043	-0.37733	-0.29505	-0.22634	-0.16623	-0.11085	-0.05671
-0.46817	-0.36519	-0.28280	-0.21376	-0.15306	-0.09684	-0.04147
-0.45464	-0.35195	-0.26955	-0.20024	-0.13804	-0.08199	-0.02543
-0.43986	-0.33760	-0.25532	-0.18583	-0.12416	-0.06634	-0.00860
-0.42387	-0.32218	-0.24011	-0.17054	-0.10817	-0.04991	0.00099
-0.40669	-0.30571	-0.22398	-0.15438	-0.09198	-0.03272	0.02731
-0.38836	-0.28825	-0.20695	-0.13742	-0.07473	-0.01481	0.04633
-0.36891	-0.26982	-0.18904	-0.11965	-0.05673	-0.00380	0.06601
-0.34838	-0.25043	-0.17030	-0.10113	-0.03805	-0.02306	0.08632

z \ ν	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
1.30	-0.11269	-0.10861	-0.07057	-0.02114	0.06066
1.35	-0.13857	-0.10260	-0.06193	+0.00342	0.08121
1.40	-0.13332	-0.09559	-0.05220	+0.00560	0.10349
1.45	-0.12753	-0.08758	-0.04137	0.02091	0.12750
1.50	-0.12059	-0.07857	-0.02944	0.03753	0.15325
1.55	-0.11270	-0.06856	-0.01640	0.05544	0.18073
1.60	-0.10386	-0.05754	-0.00227	0.07466	0.20993
1.65	-0.09408	-0.04554	-0.01297	0.09516	0.24033
1.70	-0.08335	-0.03255	-0.02928	0.11693	0.27343
1.75	-0.07169	-0.01858	0.04667	0.13996	0.30767
1.80	-0.05911	-0.00363	0.06512	0.16423	0.34354
1.85	-0.04562	0.01224	0.08460	0.18970	0.38100
1.90	-0.03122	0.02907	0.10510	0.21636	0.42002
1.95	-0.01595	0.04681	0.12659	0.24417	0.46051
2.0	+0.00018	0.06544	0.14906	0.27310	0.50249
2.05	0.01715	0.08493	0.17244	0.30309	0.54583
2.10	0.03492	0.10526	0.19673	0.33411	0.59050
2.15	0.05348	0.12640	0.22188	0.36613	0.63642
2.20	0.07280	0.14332	0.24786	0.39907	0.68355
2.25	0.09284	0.17096	0.27463	0.43291	0.73177
2.30	0.11356	0.19431	0.30213	0.46756	0.78104
2.35	0.13495	0.21831	0.33032	0.50298	0.83125
2.40	0.15694	0.24295	0.35915	0.53912	0.88231

(續表)

2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
0.27798		-0.52529	-0.31142	-0.23552	-0.19461	-0.16804	-0.14888
0.32147		-0.57226	-0.33553	-0.25191	-0.20710	-0.17814	-0.15735
0.36804		-0.62174	-0.36078	-0.26899	-0.22004	-0.18833	-0.16607
0.41771		-0.67363	-0.38711	-0.28671	-0.23349	-0.19929	-0.17501
0.47048		-0.72805	-0.41453	-0.30508	-0.24722	-0.21031	-0.18417
0.52631		-0.78489	-0.44304	-0.32409	-0.26143	-0.22165	-0.19355
0.58519		-0.84411	-0.47250	-0.34373	-0.27608	-0.23326	-0.20313
0.64710		-0.90572	-0.50320	-0.36399	-0.29111	-0.24516	-0.21292
0.71198		-0.96958	-0.53432	-0.38481	-0.30653	-0.25732	-0.22289
0.77978		-1.03574	-0.56743	-0.40623	-0.32233	-0.26974	-0.23304
0.85041		-1.10408	-0.60102	-0.42817	-0.33847	-0.28239	-0.24334
0.92385		-1.17454	-0.63548	-0.45067	-0.35495	-0.29525	-0.25379
0.99998		-1.24697	-0.67082	-0.47362	-0.37172	-0.30833	-0.26438
1.07872		-1.32139	-0.70699	-0.49707	-0.38881	-0.32157	-0.27509
1.15995		-1.39763	-0.74392	-0.52090	-0.40613	-0.33500	-0.28589
1.24352		-1.47561	-0.78156	-0.54516	-0.42370	-0.34854	-0.29677
1.32940		-1.55512	-0.81987	-0.56979	-0.44145	-0.36222	-0.30773
1.41742		-1.63617	-0.85879	-0.59469	-0.45940	-0.37593	-0.31871
1.50744		-1.71859	-0.89826	-0.61939	-0.47748	-0.38982	-0.32971
1.59926		-1.80213	-0.93818	-0.64528	-0.49568	-0.40363	-0.34071
1.69280		-1.88682	-0.97849	-0.67088	-0.51393	-0.41756	-0.35168
1.78790		-1.97240	-1.01812	-0.69659	-0.53224	-0.43144	-0.36259
1.88435		-2.05877	-1.05899	-0.72240	-0.55054	-0.44525	-0.37344

ε \ r	0	0.2	0.4	0.6	0.8
2.5	1.14662	1.18870	1.33864	1.71198	2.92532
2.6	1.10807	1.14802	1.29034	1.64442	2.79135
2.7	1.06390	1.10147	1.23527	1.56792	2.64729
2.8	1.01452	1.04950	1.17397	1.48321	2.48552
2.9	0.96043	0.99261	1.1070	1.39108	2.31054
3.0	0.90212	0.93132	1.03513	1.29240	2.12389
3.1	0.84013	0.86622	0.95884	1.18803	1.92726
3.2	0.77503	0.79786	0.87887	1.07889	1.72235
3.3	0.70737	0.72687	0.79593	0.96596	1.51095
3.4	0.63776	0.65385	0.71074	0.85018	1.29484
3.5	0.56678	0.57943	0.62399	0.73256	1.07584
3.6	0.49503	0.50422	0.53645	0.61405	0.85379
3.7	0.42310	0.42888	0.44882	0.49563	0.63648
3.8	0.35159	0.35397	0.36182	0.37829	0.41971
3.9	0.28106	0.28014	0.27614	0.26295	0.20721
4.0	0.21208	0.20795	0.19246	0.15054	0.00066
4.1	0.14518	0.13796	0.11145	0.04191	-0.19832
4.2	0.08086	0.07070	0.03370	-0.06210	-0.38822
4.3	0.01960	0.00668	-0.04020	-0.16070	-0.56759
4.4	-0.03813	-0.05363	-0.10970	-0.25319	-0.73514
4.5	-0.09195	-0.10981	-0.17432	-0.33389	-0.88965
4.6	-0.14148	-0.16148	-0.23361	-0.41723	-1.03005
4.7	-0.18640	-0.20829	-0.28719	-0.48767	-1.15540
4.8	-0.22643	-0.24995	-0.33471	-0.54977	-1.26490

(續表)

1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
	-2.07911	-0.84231	-0.42657	-0.20901	-0.06185
	-1.94319	-0.76997	-0.37374	-0.16430	-0.02016
	-1.79365	-0.69121	-0.31637	-0.11667	-0.02390
	-1.63179	-0.60673	-0.25641	-0.06651	0.06689
	-1.45903	-0.51721	-0.19287	-0.01421	0.11743
	-1.27636	-0.42351	-0.12679	0.03978	0.16614
	-1.08685	-0.32632	-0.05870	0.09502	0.21562
	-0.89061	-0.22649	0.01082	0.15107	0.26547
	-0.68982	-0.12486	0.08120	0.20715	0.31526
	-0.48614	-0.02228	0.15185	0.26369	0.36457
	-0.28127	-0.08042	0.22217	0.31934	0.41302
	-0.07694	0.18237	0.29160	0.37390	0.46016
	0.12521	0.28273	0.35956	0.42695	0.50562
	0.32354	0.38071	0.42549	0.47803	0.51901
	0.51643	0.47547	0.48883	0.52673	0.58894
	0.70235	0.56623	0.54911	0.57264	0.62809
	0.87984	0.65241	0.60580	0.61536	0.66310
	1.04751	0.73318	0.65347	0.65456	0.69468
	1.20411	0.80797	0.70669	0.68992	0.72257
	1.34841	0.87619	0.75008	0.72113	0.74653
	1.47938	0.93731	0.78332	0.74795	0.76633
	1.59609	0.99099	0.82109	0.77018	0.78181
	1.69773	1.03674	0.84813	0.78762	0.79286
	1.78363	1.07427	0.86938	0.80015	0.79934

ν λ	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
2.5	0.03243	0.20264	0.41853	0.98664	
2.6	0.10598	0.25030	0.47984	1.09825	
2.7	0.15042	0.29957	0.51260	1.20132	
2.8	0.19636	0.35008	0.60631	1.30998	
2.9	0.24347	0.40137	0.67049	1.41332	
3.0	0.29134	0.45308	0.73457	1.52544	
3.1	0.33961	0.50478	0.79303	1.63038	
3.2	0.38784	0.55601	0.86033	1.73220	
3.3	0.43566	0.60635	0.92090	1.82996	
3.4	0.48266	0.65536	0.97921	1.92275	
3.5	0.52840	0.70233	1.03470	2.00962	
3.6	0.57254	0.74764	1.08689	2.08976	
3.7	0.61466	0.79010	1.13525	2.16229	
3.8	0.65442	0.82960	1.17933	2.22614	
3.9	0.69144	0.86572	1.21866	2.28117	
4.0	0.72540	0.89817	1.25285	2.32372	
4.1	0.75599	0.92659	1.28153	2.36163	
4.2	0.78294	0.95072	1.30435	2.38561	
4.3	0.80599	0.97034	1.32104	2.39833	
4.4	0.82495	0.98518	1.33136	2.39939	
4.5	0.83959	0.99510	1.33513	2.38853	
4.6	0.84981	0.99996	1.33223	2.36572	
4.7	0.85546	0.99965	1.32237	2.33078	
4.8	0.85650	0.99417	1.30614	2.28381	

(續表)

3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
-1.14215	-0.58699	-0.39480	-0.29408	-0.22984
-1.22435	-0.62299	-0.41556	-0.30718	-0.23823
-1.30581	-0.65819	-0.43551	-0.31944	-0.24565
-1.38587	-0.69224	-0.45440	-0.33069	-0.25204
-1.46375	-0.72483	-0.47205	-0.34077	-0.25726
-1.53878	-0.75558	-0.48823	-0.34952	-0.26120
-1.61012	-0.78417	-0.50270	-0.35679	-0.26374
-1.67704	-0.81024	-0.51526	-0.36242	-0.26474
-1.73882	-0.83345	-0.52571	-0.36620	-0.26411
-1.79480	-0.85349	-0.53383	-0.36817	-0.26173
-1.84419	-0.87006	-0.53946	-0.36804	-0.25750
-1.88640	-0.88286	-0.54244	-0.36574	-0.25187
-1.92080	-0.89162	-0.54259	-0.36117	-0.24324
-1.94690	-0.89611	-0.53979	-0.35426	-0.23306
-1.96407	-0.89613	-0.53391	-0.34493	-0.22081
-1.97196	-0.89151	-0.52488	-0.33313	-0.20644
-1.97017	-0.88208	-0.51261	-0.31884	-0.18996
-1.95846	-0.86775	-0.49706	-0.30204	-0.17139
-1.93652	-0.84845	-0.47824	-0.28274	-0.15074
-1.90424	-0.82416	-0.45614	-0.26098	-0.12806
-1.86157	-0.79483	-0.43079	-0.23680	-0.10343
-1.80859	-0.76067	-0.40229	-0.21029	-0.07694
-1.74533	-0.72165	-0.37068	-0.18153	-0.04867
-1.67204	-0.67793	-0.33614	-0.15063	-0.01876

ν	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0
2.5	-0.18331	-0.14465	-0.10501	-0.03773	
2.6	-0.18800	-0.14593	-0.10136	-0.02433	
2.7	-0.19170	-0.14606	-0.09718	-0.00820	
2.8	-0.19430	-0.14492	-0.09085	-0.01080	
2.9	-0.19569	-0.14241	-0.08276	0.03284	
3.0	-0.19575	-0.13841	-0.07277	0.05809	
3.1	-0.19439	-0.13284	-0.06081	0.08668	
3.2	-0.19149	-0.12559	-0.04677	0.11871	
3.3	-0.18696	-0.11658	-0.03058	0.15134	
3.4	-0.18073	-0.10577	-0.01217	0.19353	
3.5	-0.17270	-0.09305	0.00850	0.23639	
3.6	-0.16284	-0.07842	0.03147	0.28293	
3.7	-0.15111	-0.06185	0.05074	0.33310	
3.8	-0.13744	-0.04329	0.06431	0.38680	
3.9	-0.12183	-0.02277	0.11414	0.44403	
4.0	-0.10427	-0.00030	0.14620	0.50458	
4.1	-0.08480	-0.02409	0.18033	0.56827	
4.2	-0.06342	-0.05033	0.21602	0.63489	
4.3	-0.04019	-0.07835	0.25478	0.70429	
4.4	-0.01518	-0.10807	0.29473	0.77606	
4.5	-0.01152	-0.13936	0.33629	0.84990	
4.6	0.03982	0.17210	0.37928	0.92547	
4.7	0.06959	0.20614	0.42351	1.00242	
4.8	0.10071	0.24132	0.46874	1.38027	

(續表)

5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
-0.20532	-0.14609	-0.12091	-0.10506	-0.09342
-0.22754	-0.15854	-0.12934	-0.11208	-0.09920
-0.25184	-0.17189	-0.13929	-0.11943	-0.10519
-0.27832	-0.18618	-0.14928	-0.12712	-0.11139
-0.30706	-0.20143	-0.15980	-0.13514	-0.11780
-0.33811	-0.21766	-0.17087	-0.14348	-0.12439
-0.37154	-0.23490	-0.18248	-0.15213	-0.13117
-0.40736	-0.25309	-0.19459	-0.16108	-0.13810
-0.44558	-0.27226	-0.20722	-0.17030	-0.14516
-0.48617	-0.29236	-0.22031	-0.17977	-0.15231
-0.52911	-0.31337	-0.23385	-0.18944	-0.15954
-0.57432	-0.33523	-0.24779	-0.19927	-0.16680
-0.62171	-0.35789	-0.26206	-0.20925	-0.17403
-0.67113	-0.38126	-0.27663	-0.21929	-0.18121
-0.72243	-0.40527	-0.29143	-0.22937	-0.18828
-0.77549	-0.42983	-0.30636	-0.23939	-0.19517
-0.83001	-0.45479	-0.32139	-0.24929	-0.20183
-0.88582	-0.48002	-0.33636	-0.25903	-0.20820
-0.94263	-0.50539	-0.35122	-0.26849	0.21422
-1.00012	-0.53077	-0.36586	-0.27760	-0.21978
-1.05801	-0.55599	-0.38015	-0.28632	-0.22485
-1.11593	-0.58038	-0.39403	-0.29449	-0.22935
-1.17352	-0.60527	-0.40731	-0.30203	-0.23319
-1.23040	-0.62893	-0.41989	-0.30893	-0.23629

z \ ν	0	0.3	0.6	0.9	1.0	1.2
4.95	-0.27678	-0.33747	-0.62653	-2.98999		1.88187
5.13	-0.31502	-0.37893	-0.68286	-3.16208		1.94243
5.25	-0.34083	-0.40648	-0.71827	-3.25689		1.96488
5.4	-0.35411	-0.42002	-0.73271	-3.27459		1.97959
5.55	-0.35504	Δ 0.41975	-0.72652	-3.21686		1.89759
5.7	-0.34398	-0.40612	-0.70046	-3.08673		1.81063
5.85	-0.32157	-0.37983	-0.65561	-2.88852		1.69102
6.0	-0.28856	-0.34179	-0.59336	-2.62768		1.54166
6.15	-0.24599	-0.29306	-0.51538	-2.31062		1.36586
6.3	-0.19490	-0.23486	-0.42352	-1.94436		1.16725
6.45	-0.13640	-0.16850	-0.31974	-1.53634		0.94957
6.6	-0.07169	-0.09524	-0.20604	-1.09395		0.71657
6.75	-0.00186	-0.01636	-0.08425	-0.62413		0.47176
6.9	0.07215	+0.06712	-0.04401	-0.13303		0.21811
7.05	0.14965	0.15436	0.17756	0.37530		-0.04229
7.2	0.23027	0.24510	0.31591	0.89883		-0.30859

(續表)

1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0
0.97447	0.80855	0.81721	0.97619	1.57370	
0.98709	0.80739	0.80402	0.94666	1.49952	
0.98373	0.79435	0.78074	0.90600	1.40790	
0.96460	0.77015	0.74778	0.85481	1.30009	
0.93031	0.73550	0.70572	0.79387	1.17764	
0.88171	0.69110	0.65530	0.72416	1.04238	
0.81989	0.63781	0.59740	0.64678	0.89636	
0.74615	0.57666	0.53303	0.56301	0.74181	
0.60201	0.50877	0.46328	0.47418	0.58107	
0.56903	0.43535	0.38933	0.33168	0.41654	
0.46887	0.35758	0.31223	0.28686	0.25054	
0.36315	0.27668	0.23326	0.19100	0.08522	
0.25337	0.19371	0.15328	0.09530	0.07748	
0.14080	0.10959	0.07317	0.00063	0.23614	
0.02630	0.02491	0.00658	-0.09239	-0.38991	
-0.08978	-0.06313	-0.02581	-0.18375	-0.53881	

z	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5
4.95	-0.91927	-0.27910	-0.03279	0.14956	0.39653
5.1	-0.81442	-0.21639	0.01885	0.20049	0.45790
5.25	-0.69779	-0.14872	0.07318	0.25286	0.51949
5.4	-0.57082	-0.07599	0.12948	0.30600	0.58052
5.55	-0.43521	-0.00212	0.18701	0.35911	0.64003
5.7	-0.29286	-0.07483	0.24496	0.41147	0.69726
5.85	-0.14579	+0.15280	0.30248	0.46226	0.75114
6.0	-0.00390	+0.23066	0.35874	0.51073	0.80079
6.15	-0.15403	+0.30729	0.41292	0.55611	0.84537
6.3	0.30250	+0.38161	0.46425	0.59775	0.88418
6.45	0.44732	+0.45263	0.51203	0.63499	0.91655
6.6	0.58670	+0.51948	0.55565	0.66742	0.94208
6.75	0.72916	+0.58147	0.59470	0.69470	0.96048
6.9	0.74370	+0.63818	0.62893	0.71673	0.97180
7.05	0.95992	+0.68955	0.65843	0.73369	0.97645
7.2	1.06826	0.73594	0.68360	0.74611	0.97530

(續表)

4.8	5.0	5.1	5.4	5.7	6.0
1.19769		-2.59431	-0.66272	-0.36936	-0.23940
1.31457		-2.77014	-0.69382	-0.38030	-0.24042
1.42907		-2.93667	-0.72150	-0.38808	-0.23915
1.53945		-3.09047	-0.74518	-0.39297	-0.23531
1.64376		-3.22884	-0.76412	-0.39466	-0.22871
1.74029		-3.34870	-0.77770	-0.39279	-0.21918
1.82722		-3.44705	-0.78540	-0.38717	-0.20658
1.90276		-3.52128	-0.78667	-0.37755	-0.19081
1.96551		-3.56944	-0.78110	-0.36377	-0.17185
2.01407		-3.58951	-0.76848	-0.34581	-0.14973
2.04754		-3.58039	-0.74435	-0.32363	-0.12456
2.06525		-3.54146	-0.72169	-0.29731	-0.09656
2.06702		-3.47345	-0.69784	-0.25763	-0.06602
2.05341		-3.37781	-0.64774	-0.23130	-0.03342
2.02532		-3.25755	-0.60229	-0.19874	-0.00064
1.98571		-3.11732	-0.55281	-0.16126	-0.03533

z \ ν	6.3	6.6	6.9	7.0	7.2
4.95	-0.15126	-0.05409	0.35572		-0.38068
5.1	-0.14493	-0.03640	0.48926		-0.42507
5.25	-0.13615	-0.01546	0.53275		-0.47324
5.4	-0.12474	0.00890	0.63631		-0.52499
5.55	-0.11054	0.03678	0.75003		-0.58023
5.7	-0.09346	0.06822	0.87371		-0.63373
5.85	-0.07345	0.10316	1.00681		-0.70016
6.0	-0.05048	0.14153	1.14868		-0.76404
6.15	-0.02461	0.18317	1.29851		-0.82989
6.3	0.00403	0.22777	1.45484		-0.89705
6.45	0.03526	0.27498	1.61637		-0.96462
6.6	0.06877	0.32432	1.78089		-1.03159
6.75	0.10416	0.37508	1.94625		-1.09691
6.9	0.14093	0.42648	2.10920		-1.15907
7.05	0.17834	0.47748	2.26614		-1.21640
7.2	0.21547	0.52679	2.41239		-1.26687

(續表)

7.5	7.8	8.1	8.4	8.7
-0.21111	-0.15861	-0.12884	-0.10692	-0.08425
-0.22899	-0.16941	-0.13598	-0.11140	-0.08527
-0.24789	-0.18054	-0.14316	-0.11564	-0.08552
-0.26775	-0.19196	-0.15028	-0.11953	-0.08483
-0.28845	-0.20357	-0.15726	-0.12295	-0.08304
-0.30987	-0.21526	-0.16398	-0.12579	-0.07997
-0.33181	-0.22690	-0.17032	-0.12792	-0.07541
-0.35412	-0.23833	-0.17614	-0.12917	-0.06914
-0.37645	-0.24935	-0.18123	-0.12939	-0.06094
-0.39862	-0.25979	-0.18556	-0.12840	-0.05055
-0.42019	-0.26940	-0.18880	-0.12601	-0.03771
-0.44081	-0.27789	-0.19077	-0.12200	-0.02214
-0.45998	-0.28498	-0.19122	-0.11612	-0.00352
-0.47715	-0.29032	-0.18987	-0.10811	-0.01854
-0.49167	-0.29344	-0.18641	-0.09766	-0.04442
-0.50281	-0.29393	-0.18042	-0.08436	-0.07466

附录 VI

频率键控时梯形脉冲与正弦律圆化脉冲辐射

占用的频带宽度

表 II.VI.1

m	以 $n = \frac{\Delta f}{B}$ 为单位的频带宽度						
	短形 脉 冲	当 ξ 为下列值时的 梯形脉冲			当 ξ 为下列值时的正弦 律圆化脉冲		
		0.7	0.8	0.9	0.7	0.8	0.9
1.0	2	2	2	2	2	2	2
1.5	3	3	3	3	3	3	3
2.0	3	3	3	—	3	3	3
2.5	5	4	4	5	4	4	5
3.0	6	4	4	6	4	4	6
3.5	6	5	5	6	5	5	6
4.0	7	5	5	7	5	5	7
4.5	8	6	6	7	6	6	7
5.0	8	6	6	8	6	6	8
5.5	9	7	7	8	7	7	8
6.0	9	7	7	9	7	7	9
6.5	10	8	8	9	8	8	9
7.0	10	9	9	10	8	10	10
7.5	11	9	9	10	9	10	10
8.0	11	10	10	11	—	11	11
8.5	13	10	10	11	10	11	11
9.0	14	11	11	12	11	12	12
9.5	14	11	11	12	11	12	13
10.0	15	12	12	13	12	13	13
10.5	15	12	12	13	12	13	14
11.0	16	13	13	14	12	14	14
11.5	16	13	13	14	13	14	15
12.0	17	14	14	15	14	15	15
12.5	17	14	14	16	14	15	16
13.0	18	15	16	16	15	16	16
13.5	18	15	16	17	15	16	17

(續表)

m	以 $n = \frac{\Delta f}{B}$ 为单位的频带宽度						
	矩 形 脉 冲	当 ξ 为下列值时的 梯形脉冲			当 ξ 为下列值时的正弦 律调化脉冲		
		0.7	0.8	0.9	0.7	0.8	0.9
14.0	19	16	17	17	16	17	17
14.5	19	16	17	18	16	17	18
15.0	20	17	18	18	—	18	18
15.5	21	17	18	19	17	18	19
16.0	21	18	19	19	18	19	19
16.5	22	18	19	20	18	19	20
17.0	22	19	20	20	19	20	20
17.5	23	19	21	21	19	20	21
18.0	23	20	21	21	—	21	21
18.5	24	20	22	22	20	21	22
19.0	24	21	22	22	21	22	22
19.5	25	21	23	23	21	23	23
20.0	25	22	23	23	22	23	23
20.5	26	22	24	24	23	24	24
21.0	26	23	24	24	23	24	24
21.5	27	23	25	25	24	25	25
22.0	27	24	25	25	24	25	25
22.5	28	24	26	26	—	26	26
23.0	28	25	26	26	—	26	26
23.5	29	25	27	27	—	27	27
24.0	29	26	27	27	—	27	27

附录Ⅷ

辐射的分类

根据无线电通信规程[文献 43], 将辐射加以分类和标记时, 考虑下列特性:

1. 主载频的调制类型。
2. 传输类型。

3. 附加特性。

1. 主載頻的調制类型:	記号
(a) 調幅式	A
(б) 調頻 (或調相) 式	F
(B) 脉冲式	P
2. 傳輸类型:	
(a) 不加任何傳送消息的調制	0
(б) 不用調制音頻的电报	1
(B) 借鍵控一个或几个調制音頻或鍵控已調制輻射的电报 (特殊情形: 不加鍵控的已調制輻射)	2
(r) 電話 (包括无綫电广播)	3
(д) 传真 (借直接調制主載頻, 或借对副載頻調頻)	4
(e) 电视 (仅指显象)	5
(ж) 双頻电报 (ДЧТ)	6
(з) 音頻电报 (多路)	7
(и) 其他情形	9
3. 附加特性:	
(a) 双边带	任意
(б) 单边带	
減弱的載波頻率	A
全載波頻率	H
抑制載波頻率	J
(B) 双独立边带	B
(r) 剩餘边带	C
(д) 脉冲傳輸:	
按振幅調制	D
按寬度 (或长度) 調制	E
按相位 (或位置) 調制	F
电碼-脉冲式調制	G

典型的輻射分类列在表 II. VII. I 中

表 II. 四. 1

典型辐射的分类

传 输 类 型	附 加 特 性	标志符号
I. 载频振幅调制	无调制	A 0
不用音频调制的电报(振幅键控)	—	A 1
借键控一个或几个调制音频的电报,或借键控已调制辐射的电报(特殊情形:不加键控的已调制辐射)	—	A 2
电话	双边带	A 3
	单边带; 减弱载波频率	A 3 A
	单边带; 抑制载波频率	A 3 J
	两个独立边带	A 3 B
传真(借直接调制主载频,或借对副载频调制)	—	A 4
电视	单边带; 减弱载波频率	A 4 A
多路音频电报	剩余边带	A 5 C
上述以外的情形,例如电话与电报的复合传输	单边带; 减弱载波频率	A 7 A
	双独立边带	A 9 B
II. 载波频率调频(或调相)		
不用音频调制的电报(移频电报),在任何时间,辐射两频率之一。	—	F 1
借键控一个或几个调制音频的电报,或借键控已调频的辐射(特别情形,不加键控的已调频辐射)的电报	—	F 2
电话	—	F 3
借间接调制载频的传真	—	F 4
电视	—	F 5
双频电报(双CT)	—	F 6
除上述外对主载波调频的情形	—	F 9
III. 载波频率的脉冲调制		
脉冲载波,不加传输消息的调制(例如雷达)	—	P 0

(續表)

傳 輸 類 型	附 加 特 性	標 志 符 號
借鍵控脈沖載波的电報 (不用音頻調制) 借鍵控一个或几个調制音頻或借鍵控已調制脈沖載波 (特別情形: 不加鍵控的已調制脈沖載波) 的电報 電話 除上述外, 对主載波脈沖調制的情形	—	P1D
	用一個或几个音頻來調制脈沖的振幅	P2D
	用一個或几个音頻來調制脈沖的寬度	P2E
	用一個或几个音頻來調制脈沖的相位 (或位置)	P2F
	調制脈沖振幅	P3D
	調制脈沖寬度 (或長度)	P3E
	調制脈沖相位 (或位置)	P3F
	脈碼調制 (在脈幅調制与选择出脈沖信号以后)	P3G
—	—	P9

參 考 文 獻

1. Андреев Н. Н. Электрические колебания и их спектры. М., 1917.
2. Balth, van der Pol, Frequency modulation. Proc. of the IRE, т. 8, № 7, 1930, стр. 1195.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. ГИТТЛ, 1933, 1.
4. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» в проволоки в электросвязи. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции связи и развития слаботочной промышленности. М., Связьиздат, 1934.
5. R. E. A. C. Paley and N. Wiener—Fourier transforms in the complex domain, American Mathematical Society, New York, 1934.
6. Майер А. Г. и Лернгович Е. А. Об одном неравенстве, связанном с интегралом Фурье. Доклады Академии наук СССР, т. IV, № 7, 1934, стр. 354.
7. Сифоров В. И. Об уплотнении эфира и проволоки при фазовой телеграфной передаче. В кн. Ленинградский электротехнический

- институт связи, научно-технический сборник, вып. 15. Связьиздат, 1936, стр. 24.
8. Рытов С. М. Модулированные колебания и волны. Труды ФИАН, т. II, вып. 1, 1938.
 9. Stratton I. A., Morse P. M., Chu L. J., Hutner R. A. Elliptic cylinder and spheroidal wave functions, The Technology Press, M. I. T., 1941.
 10. Рытов С. М. О некоторых «парадоксах», связанных со спектральными разложениями. Успехи физических наук XXIX, вып. 1—2, 1946.
 11. Gabor D. Theory of communication, JIEE, (III), v. 93, № 26, 1946, стр. 429.
 12. Slack M. The probability distributions of sinusoidal oscillations combined in random phase, Journal IEE, ч. III, т. 93, № 22, 1946, стр. 76.
 13. Corrington M. S. Variation of bandwidth with modulation index. Proc. of the IRE, т. 35, № 10, 1947, стр. 1013.
 14. Янке Б., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. ГИТТЛ, 1948.
 15. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, 1949.
 16. Котельников В. А. и Николаев А. М. Основы радиотехники, ч. I. М., Связьиздат, 1950.
 17. Бунимович В. И. Флуктуационные процессы в радиоприёмных устройствах, Изд. «Советское радио», 1951.
 18. J. N. H. Chalk. The optimum pulse-shape for pulse communication. Proc. IEE, т. 87, 1950, стр. 88.
 19. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и проведенных. Изд. 3-е. М. Л., Гостехиздат, 1951.
 20. Титчмарш Е. Теория функций. ГИТТЛМ, Л., 1951.
 21. Sawthra W. A. and Thomson W. E. Bandwidth of sinusoidal carrier wave, frequency-modulated by a rectangular with half-sine-wave build-up. Proc. IEE, ч. III, № 51, т. 98, 1951, с. 69.
 22. М. В. Шулейкин. Сборник статей под ред. акад. Б. А. Введенского. Изд. «Советское радио», 1952.
 23. Харкевич А. А. Спектры и анализ. Гостехниктеоретиздат, 1952.
 4. Таблицы интегралов Фрепеля, под ред. В. А. Диткина. Изд. Ил-та точной механики и вычислительной техники АН СССР, М., 1953.
- Blanc-Lapierre Aet Fortet R.—Théorie des fonctions aléatoires, Masson et Cie. Paris, 1953.
- Чис С. Теория флуктуационных шумов. В сборнике под редакцией А. Железнова. ИЛ, 1953, стр. 88.
- Таблицы интегрального синуса и косинуса, под ред. В. А. Диткина. Ил-та точной механики и вычислительной техники АН СССР,

- М., 1954.
28. Харкевич А. А. Очерки общей теории связи. М., Гостехиздат, 1955.
 29. Helbing H. Pomiaru widma radiotelegraficznego, Prace Instytutu Łączności Zeszyt 1 (2), Rok II Warszawa, 1955, с. 23.
 30. Гуревич М. С. Сигналы конечной продолжительности, содержащие максимальную долю энергии в заданной полосе частот. «Радиотехника и электроника», т. 1, 3, 1956, стр. 313.
 31. Гуревич М. С. Полоса частот, занимаемая при передаче импульсов. «Радиотехника и электроника», т. II, 1, 1957, стр. 38.
 32. Харкевич А. А. О возможностях сжатия спектра сигнала. «Электросвязь», № 4, апрель 1957, стр. 3.
 33. Харкевич А. А. О вычисления спектров случайных процессов. «Радиотехника», т. 12, № 5, май, 1957, стр. 5.
 34. Гуревич М. С. Новый метод измерения ширины полосы частот, излучаемой радиотелеграфными передатчиками. «Вестник связи», 12, 1957, стр. 27.
 35. Allnatt I. W. and Jones E. D. J. An investigation of the spectra of binary frequency-modulated signals with various build-up wave-forms. Proc. IEE. Pt. B, № 14, Vol. 104, March, 1957, с. III.
 36. Морс Ф. М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. I, ИЛ, 1958.
 37. Гуревич М. С. Измерение ширины полосы частот, излучаемой радиотелеграфными передатчиками, «Измерительная техника», № 1, 1958, стр. 62.
 38. Гуревич М. С. Спектр радиочастот и его использование. «Вестник связи», № 4, 1958, стр. 11.
 39. Гуревич М. С. Полоса частот, занимаемая передачей случайной последовательности сигналов. «Радиотехника», т. 13, № 11, 1958, стр. 18.
 40. C. C. I. R. Documents of the IX th Plenary Assembly (Los Angeles, 1959), ITU, Geneva, Vol. I, II, III, 1959.
 41. Жислиж Г. М. К задаче об оценке произведения продолжительности сигнала на ширину его полосы. Известия высших учебных заведений, «Радиофизика», т. 3, № 5, 1960, стр. 860.
 42. Гуревич М. С. Косинус-кубичные импульсы. «Радиотехника», т. 15, № 5, 1960, стр. 60.
 43. Регламент радиосвязи 1959 г. Связьиздат, 1961.
 44. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и её применение в радиотехнике. М., Изд. «Советское радио», 1957.